

SONDERDRUCK
AUS DEN VERHANDLUNGEN DER PHYS.-MED. GESELLSCHAFT ZU WÜRZBURG
N. F. BD. LII. HEFT I

2. Problemkreise der Mathematik in historischer Entwicklung.

Von

O. Neugebauer, Göttingen, als Gast.

1927

Wenn ich im Folgenden versuche, einzelne charakteristische Züge aus der Geschichte der Mathematik herauszugreifen, so kann dies bei der Unermesslichkeit des Gebietes nur durch eine notwendig sehr subjektive Auswahl geschehen. Um aber nicht bei einer blossen Aufzählung von Einzelheiten stehen zu bleiben, will ich meine Ausführungen in einen ganz bestimmten Rahmen fassen, der einerseits durch das Wechselspiel zwischen „Arithmetik“ und „Geometrie“, andererseits durch die damit aufs engste verknüpfte Frage nach der Rolle des „Unendlichen“ in der Mathematik festgelegt sein soll.

Ich will sogleich auf diesen zweiten Punkt eingehen, weil er ganz unmittelbar mit einer weit über den engeren Kreis der Fachmathematiker hinaus bekannt gewordenen Frage zusammenhängt: der Frage nach den „Grundlagen der Mathematik“. Bereits in jenem Teile der modernen Mathematik, der sich das weiteste Anwendungsgebiet erobert hat, in der Differential- und Integralrechnung, tritt eine für Jeden der das erste Mal mit diesen Dingen in Berührung kommt, charakteristische Schwierigkeit hervor: die Bedeutung des „Unendlich-Kleinen“, bzw. des „Grenzüberganges“ — etwa der Übergang von der Sehne einer Kurve zur Tangente. Es ist auch in der historischen Entwicklung dieser Disziplin gerade die Anwendung dieser Begriffe gewesen, welche zu absoluten Widersprüchen (wie $2 = 3$) zu führen schien. Aber schon *Cauchy* (1789—1857) und vor allem *Weierstrass* (1815—1897) haben allen hierhergehörigen Schlussweisen volle Sicherheit geben können, indem sie alles halb gefühlsmässige Operieren mit unendlichen Prozessen durch allein auf endliche Gesamtheiten sich erstreckende Schlüsse ersetzten. Aber gerade die *Weierstrass*sche Grundlegung der Analysis hat mächtig zur Ausbildung einer Disziplin beigetragen, welche sich seither immer mehr als in die gesamte Mathematik eingreifend erwiesen hat: der sog. *Mengenlehre*, deren Aufgabe es ist, die Eigenschaften unendlicher Gesamtheiten („Mengen“, ohne Rücksicht auf die individuelle Beschaffenheit ihrer „Elemente“) zu

untersuchen — und gerade hier haben sich neuerlich explizite „Paradoxien“ ergeben, wodurch aufs ärgste das Vertrauen in die Sicherheit der Gesamtmathematik erschüttert wurde. Dass es auch hier wieder die Rolle des „Unendlichen“ ist, welche der Klärung bedarf, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

Ich will nun in grossen Umrissen einige Grundgedanken einer Theorie skizzieren, welche *Hilbert* zur Erledigung dieser Schwierigkeiten entwickelt hat, indem ich mich an einen von ihm gelegentlich eines Kongresses zu Ehren von *Weierstrass* gehaltenen Vortrag anschliesse¹⁾.

Der Typus des „Unendlichen“, der in der Differentialrechnung bei dem Begriffe des Grenzwertes eine entscheidende Rolle spielt und der sich sozusagen kinematisch fassen lässt (man denke z. B. an die in die Tangente „hineinrückende“ Sehne) wird als das potentiell Unendliche bezeichnet im Gegensatz zu dem aktual Unendlichen, wie es uns in einer fertigen Gesamtheit, etwa in der Menge „aller“ ganzen Zahlen 1, 2, 3 . . . entgegentritt. Jener erste Typus ist, wie gesagt, bereits durch die *Weierstrass*sche Theorie gebändigt worden, während nun *Hilbert* das Ziel vor Augen hat, auch diejenigen Schlüsse, welche mit dem aktual Unendlichen operieren, auf eine sichere Basis zu stellen. Zur Gewährleistung der vollen Sicherheit des logischen Schliessens muss verlangt werden, dass sich seine Objekte in allen Teilen vollkommen überblicken lassen, dass sie also in endlicher Anzahl unmittelbar anschaulich „aufweisbar“ sein müssen. Die Mathematik wird damit zunächst zu einem Operieren mit unmittelbar gegebenen Zeichen, etwa hingeschriebenen Zahlzeichen, zur Mitteilung ausschliesslich „finiten“ Aussagen wie $1 + 2 = 2 + 1$: „Am Anfang ist das Zeichen“ wie es *Hilbert* ausdrückt²⁾. Es wird sich weiter aber gerade darum handeln, von hier aus auch zu dem Rechnen mit Buchstaben vorzudringen, das erst die Mathematik zu einem wirklich handlichen Instrument macht, wobei also z. B. jene obige Aussage mit unendlich vielen andern zu der einen „Formel“ $a + b = b + a$ zusammengefasst wird.

*Hilbert*s Aufbau der Gesamtmathematik besteht nun darin, dass er eine „Formel“ als völlig inhaltslose Zeichengruppe auffasst, mit der nach festen absolut finiten Regeln rein förmal zu operieren ist, womit ja die Endlichkeit des Bereiches aller Schlüsse gewahrt bleibt. Einige dieser Formeln werden als „Axiome“ vorausgenommen, alle aus ihnen

¹⁾ Veröffentlicht in Bd. 95 der Math. Annalen (1925), S. 161.

²⁾ Abh. aus dem math. Seminar d. Hamburgischen Univ. Bd. 1 (1922), S. 163.

durch formale Schlüsse ableitbaren Formeln heissen „beweisbar“. Da aber die Auswahl der „Axiome“ eine ganz willkürliche ist, bleibt in jeder „axiomatisierten“ mathematischen Theorie die Aufgabe, nachzuweisen, dass die gewählten Axiome untereinander verträglich sind, d. h. es ist der sog. „Beweis der Widerspruchsfreiheit“ zu führen; von da an ist man gegen das Auftreten von Paradoxien prinzipiell gesichert.

Rein äusserlich betrachtet ist damit die Mathematik durchaus einem Spiel nach festen Regeln zu vergleichen. Dass sie trotzdem ernstes Interesse bieten kann, verdankt sie nicht nur dem Umstande, dass sich im Rahmen dieses Spieles eine Unzahl reizvoller Aufgaben stellen lässt, sondern vor allem dem, dass diejenigen Axiome, auf denen die tatsächlich existierende Mathematik aufgebaut ist, aufs Tiefste mit dem ganzen Erfahrungskomplex des menschlichen Daseins von Urzeiten an verknüpft ist, so dass sich hieraus umgekehrt das philosophische und physikalische Problem ergibt, zu erforschen, welches die in unserer Konstitution und in der Aussenwelt liegenden Ursachen zur Bevorzugung gerade dieses Axiomensystems sind — ich nenne nur die an *Gauss*, *Helmholtz*, *Riemann* anknüpfende Frage nach der tatsächlich gültigen Geometrie. In letzter Linie ist es eben nur die Beziehung zur Wirklichkeit, die unsere Mathematik vom reinen Spiel unterscheidet und sie zu einer lebendigen Wissenschaft macht.

Nach diesen auf die formal logischen Grundlagen der Mathematik gerichteten Betrachtungen, wende ich mich zu ihren historischen Voraussetzungen. Der Sprung ist kein geringer: Er versetzt uns etwa 5000 Jahre zurück zur Mathematik der *Ägypter*.

Die schriftliche Ausdrucksform für Zahlen ist dort (wie bei allen anderen Völkern, soweit sie ursprünglich ist) eine Schreibung mit einzelnen Marken (z. B. $\overline{\text{IIII}}$ für 5) — dass aus Gründen der Übersichtlichkeit die höheren Einheiten wie 10, 100, . . . besondere Zeichen erhalten, ist für uns hier ganz unwesentlich. In einer solchen Schreibweise hat man es genau mit der *Hilbertschen* „Aufweisung“ zu tun; sein Wort: Am Anfang ist das Zeichen“ kann man modifizieren in: „Am Anfang war das Zeichen“. Dazu passt das vollkommene Fehlen der „Formel“ und des „Beweises“: sämtliche uns erhaltene Dokumente ägyptischer (und auch aller übrigen altorientalischen) Mathematik bilden ausnahmslos eine blosse Sammlung zahlenmässig durchgeführter Einzelbeispiele, aus denen man bestenfalls eine Regel abstrahieren kann, zeigen aber keine Spur einer allgemeinen Begründung. In

Ägypten kommt noch eine besondere Eigentümlichkeit dazu, nämlich das strenge Festhalten an der jeder primitiven Mathematik eigenen Additivität alles Rechnens. Das hat einerseits zu einer nur auf fortgesetzter Verdoppelung beruhenden „Multiplikation“ geführt und andererseits durch sinngemässe Ausdehnung dieses Verfahrens auf Brüche eine Bruchrechnung ergeben¹⁾, die zwar äusserlich von grosser Umständlichkeit gewesen ist, aber trotzdem über Griechen und Römer ihren Einfluss bis in unser Mittelalter hinein erstreckt hat.

Man könnte der Behauptung von dem Mangel jeglicher Formel in der orientalischen Mathematik entgegenhalten, dass die Kenntnis geometrischer Gesetzmässigkeiten (etwa die Berechnung der Dreiecksfläche) dem widerspreche. Sicherlich hat der Historiker das Recht, gewissermassen abkürzend, zu sagen, den Ägyptern sei die „Formel“ $F = \frac{1}{2} gh$ bekannt gewesen; aber für eine Untersuchung der abstrakten mathematischen Begriffsbildungen kann diese Aussage nicht bestehen bleiben. Denn jene Regeln stehen völlig parallel etwa den Regeln zur Berechnung des Getreidebedarfes für die Herstellung von Bier eines bestimmten Gehaltes, sind also im wahrsten Sinne des Wortes „Rezepte“. Die Erfahrung lehrt, dass sie etwas Brauchbares ergeben, man verifiziert sie immer wieder von Neuem, aber man beweist sie nicht! Geometrie ist nicht mehr als ein Anwendungsgebiet der „Arithmetik“.

Ganz ähnlich liegen die Dinge in dem zweiten antiken Kulturzentrum, in Babylonien, nur dadurch modifiziert, dass die Additivität der frühesten Entwicklungsphase (wie sie auch noch in den alten sumerischen Texten klar erkennbar ist) frühzeitig durch die Ausbildung einer unabhängigen Multiplikation beeinflusst wurde. Die äusserliche Besonderheit des sumerisch-babylonischen Zahlensystems nach 10, nicht 100 sondern 60 als nächste Einheit zu benutzen hängt meines Erachtens mit der frühen Rücksichtnahme auf die multiplikativen, oder hier besser, auf die Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen zusammen und steht ausserdem in unmittelbarer Beziehung zu einer systematischen Regelung der Masse und Gewichte²⁾. Prinzipiell bedeutsam ist aber, dass eben dieser Zusammenhang eine Zifferschreibung zur Folge hatte, welche die höheren Einheiten nicht mehr wie ursprünglich durch individuelle Zahlzeichen ausdrückt, sondern wie bei uns, durch wenige

¹⁾ Einzelheiten findet man in meiner Arbeit: Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Springer 1926.

²⁾ Für den ausführlichen Nachweis dieser Beziehung muss ich auf eine demnächst in d. Abh. d. Göttinger Akad. d. Wiss. erscheinende Arbeit verweisen.

Zeichen mit Hilfe von „Stellenwert“ — allerdings mit dem einen tiefgreifenden Unterschied, dass die „Null“ an den Enden eines Zahlausdruckes nicht existiert (so wie wenn wir 160, 16 und 1,6 immer durch „16“ ausdrückten). Erst bei den Indern ist dieser letzte Schritt (unter Aufgabe eines nach dem primitiven Schema gebildeten eigenen Zahlensystems) wirklich vollzogen worden und hat uns das heute übliche „arabische“ Ziffersystem mit absolutem Stellenwert geschenkt. Wieder einmal zeigt sich, wie das gewissermassen zufällige Produkt historischer Entwicklung scharf von bewusster wissenschaftlicher Konstruktion zu trennen ist, wie nahe es ihr auch im Ergebnis kommen mag.

Rückblickend können wir sagen, dass die ganze vorgriechische Mathematik „arithmetischen“ Charakter trägt, aber auch dieses Wort nicht im Sinne einer bewusst gepflegten wissenschaftlichen Disziplin verstanden. Es ist ein immer wieder begegnendes Missverständnis, dass man meint, mit einer solchen Feststellung sei eine Disqualifikation jener Epochen verbunden. Ganz abgesehen davon, dass dieser Glaube unbedenklich bei uns übliche Wertmasse auf gänzlich andersartige Kulturen überträgt, ist im Gegenteil zu sagen, dass man die ungeheuere Leistung, welche in der Ausbildung der ersten Rechenmethoden gelegen ist, nur dadurch richtig einschätzen kann, dass man sich klar macht, welches Hindernis es bedeutet, dass man mathematische Gesetzmässigkeit noch nicht scharf von der empirischen Umwelt zu lösen vermag. Von dem modernen Historiker einer Wissenschaft verlangt dies allerdings, dass er im Stande ist, sich mit der Gesamtkultur einer Epoche vertraut zu machen.

Das Bild der griechischen Mathematik kann nicht scharf genug von dem eben skizzierten abgehoben werden. Wohl haben die Griechen ein unschätzbares Erfahrungsmaterial aus dem Orient übernommen; wie enge aber auch diese sachlichen Beziehungen sein mögen, so gänzlich neu ist die innere Einstellung. Jetzt lässt sich sehr scharf definieren, was „wissenschaftliche“ Mathematik heisst: Übergang von der Einzelaussage zum allgemeinen mathematischen Gesetz und vor allem die Einsicht in die Möglichkeit und Notwendigkeit mathematische Sätze zu *beweisen*.

Hier scheint mir nun die Stellung, welche die Geometrie in prinzipieller Hinsicht in der griechischen Mathematik einnimmt, einer besonderen Bemerkung wert. Man vergegenwärtige sich einen Augenblick die äussere Lage: das so folgenreiche Prinzip, mit einer geringen Zahl

von „Einkonsonantenzeichen“ (unseren „Buchstaben“) alle Worte ausdrücken zu können, hat in einer nicht sehr glücklichen Anwendung derselben Zeichen auch zur Wiedergabe von Zahlen zu den bekannten griechischen „Zahlbuchstaben“ geführt, die in ihrer völligen Beziehungslosigkeit zu der inneren Struktur des Zahlensystems jede Einsicht in dessen Bau ganz wesentlich erschwerte und seine Handlichkeit herabdrückte. Da muss man es als eine der einschneidendsten Entdeckungen bewerten, dass man erkannte, dass auch in geometrischen Konstruktionen arithmetische Beziehungen zum Ausdruck kommen. Damit verliert die Geometrie den Charakter, ein beliebiges praktisches Anwendungsgebiet der Mathematik zu sein, und erhält die prinzipielle Bedeutung allgemeine mathematische Gesetzmässigkeit zum Ausdruck bringen zu können: *die geometrische Konstruktion spielt von da an die Rolle der „Formel“*.

Dieser Schritt ist für die Weiterentwicklung der Mathematik von der allergrössten Bedeutung; jetzt erst ist die Möglichkeit des Beweises allgemeiner Sätze gegeben, erst an der geometrischen Gestalt entwickelt sich die Einsicht in die Hierarchie der Lehrsätze und Schlüsse, die schliesslich in Euklids Werk eine klassische, bereits ganz „axiomatisierte“ Darstellung gefunden hat. Was alles dieses für die Mathematik bedeutet, ist wohl jedem klar. Es muss aber noch eine andere Konsequenz jener Entdeckung erwähnt werden, die unmittelbar an die einleitenden Betrachtungen anknüpft: das Auftreten des Unendlichen in der Mathematik. Jene „geometrische Analysis“ (wie ich kurz sagen will) führt mit Notwendigkeit über den finiten Bereich hinaus: Einerseits nämlich, in der an die überkommene Geometrie anknüpfende Aufgabe, Längen von Kurven, Flächen- und Voluminalhalte zu bestimmen, nun aber in einem exakten Sinne, da jetzt eine geometrische Figur nicht mehr bloss der empirischen Aussenwelt angehört, sondern „ideales“ Element der Mathematik geworden ist. Es ist allgemein bekannt, dass in der Tat auf diesem Wege die griechische Mathematik zu Methoden und Begriffsbildungen gelangt ist, die durchaus dem Ideenkreis der modernen Integralrechnung angehören. Und auch die Beziehung dieser Dinge zu dem Problem des Unendlichen ist den Griechen nicht verborgen geblieben, um so weniger als ihnen dies nun noch von ganz anderer Seite, nämlich unmittelbar von der Repräsentation der Zahlen durch Strecken vor Augen trat: In der Erkenntnis, dass die Gesamtheit der ganzen Zahlen und Brüche nicht ausreicht, um sämtliche Strecken durch sie zu messen (dass z. B. die Diagonale eines Quadrates nicht durch ein derartiges Multi-

plum seiner Seite ausgedrückt werden kann), d. h. in der Entdeckung der Irrationalzahlen. Man weiss, wie wichtig z. B. *Platon* diese Entdeckung genommen hat; so hat das Problem des Unendlichen nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Philosophie der Griechen eine ganz zentrale Stellung erlangt.

Zur restlosen Klärung aller dieser Fragen durchzudringen war den Griechen nicht vergönnt. Die an sie anschliessende Entwicklung hat sich teils damit begnügt, die rein äusserlichen Resultate der griechischen Geometrie zu übernehmen, teils die philosophischen Ideen für sich auszuspinnen. Auch die heutige Geschichte der Mathematik steht meist auf einem ähnlichen Standpunkte, indem die ganze griechische Mathematik zu einer museumsartigen Rüstkammer von Lehrsätzen wird, die sich dann aber noch notgedrungen gefallen lassen müssen mit unserer „Elementarmathematik“ auf eine Stufe gestellt zu werden. Es ist eine der lohnendsten Aufgaben, auch auf diesem Gebiet geschichtlicher Forschung das Niveau der modernen Allgemeingeschichte zu erreichen.

Dazu kommt noch ein Zweites: Man darf nicht vergessen, dass neben der wissenschaftlichen Mathematik der Griechen immer eine wirkliche Elementarmathematik bestanden hat und dass gerade hier die Brücken zu den vorangehenden und nachfolgenden Epochen liegen. Auch diesen Strömungen nachzugehen wird für das Verständnis der historischen Entwicklung von grosser Bedeutung sein, insbesondere wenn uns einmal die arabischen Quellen weiter erschlossen sind als bisher. Dann erst wird man im einzelnen verfolgen können, wie die Strömungen verlaufen, die griechische und nun auch indische Errungenschaften über die Welt verbreiten.

Das Problem des Unendlichen, dessen Auftreten im Bereich der griechischen „Geometrie“ wir soeben berührt haben, sollte in seiner von der Mathematik losgetrennten rein philosophischen Gewandung doch noch einmal in die Geschichte der Mathematik eingreifen. Es ist bekannt genug, wie die christliche Scholastik in merkwürdiger Parallelität und Wechselwirkung mit islamischer und jüdischer Theologie an die neuplatonische und Aristotelische Philosophie anschliessend, die Lehren der Religion mit den überkommenen Methoden logischer Deduktion zu verbinden suchte. Und man braucht nur an so grundlegende Sätze wie den ontologischen Gottesbeweis *Anselms von Canterbury* zu denken, um ihre unlösliche Verknüpfung mit dem alten Problem des Unendlichen zu erkennen. Die hohe dialektische Schulung, welche

ein ganz wesentliches, oft viel zu geringschätzig beurteiltes Ergebnis dieser Epoche bildet, ist aber nicht nur als Vorbereitung für die Mathematik und Naturwissenschaft der Renaissance von Bedeutung, sondern hat auch ganz unmittelbare Beziehungen zur modernen Mathematik: *Bolzano* (Theologe und Mathematiker um 1800) und *G. Cantor*, der Schöpfer der schon eingangs erwähnten „Mengenlehre“, schliessen in ihren Bemühungen um die Klärung des Begriffes „Unendlich“ und seiner präzisen Ausgestaltung ganz explizite an die analogen Problemstellungen der Scholastik an. Damit fliessen in der folgenreichsten Weise die beiden einst aus gemeinsamer Quelle entsprungenen Ströme wenigstens zum Teil wieder in ein Bett zusammen. Allerdings die Einheit ist keine vollständige. Einerseits hat die Philosophie der Renaissance — wohl am deutlichsten in *Giordano Brunos* Lehren — durch die gewissermassen a priori postulierte Unendlichkeit der Welt die in diesem Begriff liegenden Schwierigkeiten vergessen lassen und damit auch die neuere Philosophie in eine Art Sackgasse geführt, aus der sie erst durch wirklichen Kontakt mit der selbständig weiterentwickelten Mathematik und Naturwissenschaft befreit werden kann. Andererseits ist auch die Mathematik immer mehr zu einer Spezialwissenschaft geworden, ohne aber nun ihrerseits der philosophisch-begrifflichen Klärung ihrer Grundlagen auf die Dauer entraten zu können — davon legt ja gerade die moderne Entwicklung beredtes Zeugnis ab.

Man darf aber nicht meinen, die neue Mathematik stelle in allen Stücken nur eine Weiterführung der griechischen dar; im Gegenteil: bei aller Gemeinsamkeit gerade der prinzipiellsten Fragen geht die moderne Arbeitsmethode oft vom fast entgegengesetzten Standpunkt aus. Die historische Entwicklung schliesst nicht allein an die geometrischen Ergebnisse der griechischen Mathematik an, sondern bringt das arithmetisch-algebraische Element immer mehr zur selbständigen Geltung, auf das entscheidendste gefördert durch den Sieg des indischen Ziffernsystems. Ganz allmählich entwickelt sich dabei die abgekürzte Buchstabenrechnung, bis sie plötzlich als ein Werkzeug erscheint, das der geometrischen Methode weit überlegen ist. Durch *Fermat* und vor allem *Descartes* wird die volle Konsequenz aus dieser Entwicklung gezogen: in der „analytischen Geometrie“ gewinnt die algebraische Formel und die stetig veränderliche Zahlengrösse die völlige Führung; die Allgemeinheit und Übersichtlichkeit der neuen Methode übertrifft bei weitem die jeder geometrischen Konstruktion. Auch das geometrische Element mathematischer Forschung hat durch die

„analytische“ Methode eine ungeahnte Förderung erfahren; aber trotz aller auch „rein“ geometrischer Gegenströmungen wird das Bild der modernen Mathematik immer mehr durch die Bestrebungen nach ihrer „Arithmetisierung“ beherrscht, seit die Grundlagenkrise der Differentialrechnung und dann der Mengenlehre den Blick für das logisch Prinzipielle geschärft hatte.

Man mag glauben damit einem endgültigen Abschluß aller Mathematik nahe zu sein. Aber gerade die allerneueste Entwicklung zeigt, dass dem nicht so ist, dass die Quellen allen mathematischen Denkens, die Beziehung zu den Gesetzmässigkeiten unserer Umwelt und die Freude an der geometrischen Gestalt als solcher ihre volle Leben spendende Kraft bewahrt haben.

Ich weiss sehr wohl, dass eine so allgemein gehaltene Betrachtung allen Einwänden offen steht. Der Zweck meiner Ausführungen wird aber vollkommen erreicht sein, wenn es mir gelungen ist, zu zeigen, dass auch die Geschichte einer Wissenschaft über Prioritätsfragen hinausgehende Probleme birgt, wenn man sie in den Rahmen einer allgemeinen Kulturgeschichte einzuordnen sucht.