O. Neugebauer

Über

vorgriechische Mathematik

Kopenhagen S. S. 34. (1 st. + Sem.)

Inhalt

Kapitel I.

20. 2. 34

Babylonische Rechentechnik

§1. Reziprokentabellen

α. Vorbemerkungen: Äusseres

1) Zahlzeichen 𒁹 𒌋 und Iteration

2) Sexagesimalsystem 1,4 1,21

1,0 0;30 1,0,4 ≙ „30" ~ $30 \cdot 60^{\pm k}$ ~~[illegible]~~

3) Tabellentypen: VAT 2704
VAT 8492
AO 6456

β. Allgemeine Gesetzmässigkeiten für Reziproke Zahlen

1) Endliche Sexagesimalentwicklung von

$$\frac{1}{a} = \ldots\ldots + \frac{a_n}{60^n}$$

verlangt dass $a = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ (notw. u. hinr.)

Alle ganzen Zahlen vom Typus $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ heissen „regulär"
alle andern „irregulär".

2) Berücksichtigung der Unbestimmtheit $60^{\pm k}$

$a \equiv b$ (fact. 2, 3, 5) spez. $a \equiv b$ (fact. 60)

also $n \equiv 1$ (fact. ~~[illegible]~~ 2, 3, 5) „regulär"

Die Gesamtheit aller Zahlenpaare $n, \bar{n}$ mit regulären n die

$$n \cdot \bar{n} = 1 \quad (\text{fact. } 60)$$

heisst „Reziprokentabelle".

γ. Terminologie

1) Terminologie des Hauptteils:

Typus A: igi $\underline{n}$ gál-bi $\underline{\bar{n}}$ $\quad n \geqq 3$ regulär

Typus B: ausnahmen $\underline{n}$ igi nu für irregulären

2) Terminologie des Anfangs:

$\underline{1}$-da	$\underline{2/3}$-bi	$\underline{40}$-àm*	$\underline{1}$	$\underline{2/3}$-bi	$\underline{40}$	$\underline{1}$	$\underline{40}$-àm*
šu-ri-a-bi		$\underline{30}$-àm*	šu-ri-a-bi		$\underline{30}$	$\underline{2}$	$\underline{30}$-àm*
igi $\underline{3}$		$\underline{20}$	$\underline{3}$		$\underline{20}$	$\underline{3}$	$\underline{20}$
igi $\underline{4}$		$\underline{15}$	$\underline{4}$		$\underline{15}$	$\underline{4}$	$\underline{15}$
u.s.w.			u.s.w.			u.s.w.	

3) a) Dies sehr typisch für die allmähliche Erstarrung einer Terminologie zu an sich sinnlosen Formen.

b) Problem der Sexagesimalstelle dieser Zahlen.

c) Hinweis auf mangelnde Eindeutigkeit der Terminologie da „igi" auch in „verallgemeinerten" Tabellen mit

$$\underline{n} \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{a} \neq 1 \quad (\text{fact. } 60)$$

vorkommt.

δ. Frage nach der Berechnungsweise.

1) Umfang der „Normaltabelle A" und „Stellenzahl" einer Tabelle. Diese passim belegt.

2) Umfangreichere Tabellen

a) Bruchstück einer 3-stelligen Tafel (VAT 2117)

b) Spezielle 2- bis 4-stellige Tafeln $\quad \underline{n} = 2^{\alpha} 3^{0} 5^{3} \quad \alpha = 0, 1, \dots, 12$

$$\overline{2,5} = 28,48$$

$$\overline{4,10} = 14,24$$

$$\vdots$$

$$\overline{4,26,40} = 13,30 \quad (\text{bis hierher CBM } 10201)$$

$$\vdots$$

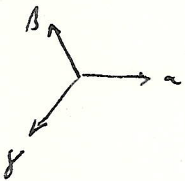
$$\overline{2,22,13,20} = 25,18,45 \quad (\text{bis hierher BM } 80150)$$

c) 6-stellige Tabelle AO 6456 $\sqrt[\leq 3]{}$ bis zu 17-stelligen Rez.
d.h. $< 3.60^5 = 23328.10^5$

3) Untersuchung der Berechnungsmethode:

Möglichkeiten: „direkte" Berechnung
„Siebmethode"

Untersuchung durch __Diagrammverfahren__



Beispiel: __2b.)__

Diskussion von __Fig. 6__ (QS B2 S. 209)

ε) Verallgemeinerte Reziprokentabellen

Im Seminar zu behandeln $\boxed{23.\ 2.\ 34.}$

§2. Andere Tabellentexte und babylonische Rechentechnik überhaupt.

$\boxed{27.\ 2.\ 34.}$

α. Allgemeine Problemstellung.

Fundamentaler Unterschied zwischen „Zählen" und „Rechnen". „Zahlzeichen" dienen a priori __nur__ zum Zählen. Das __Rechnen__ mit Zahlen ist ein vollkommen __neues__ Problem.

Allgemeine Übersicht:

	Babyl.	Aeg.	Griechen alt	Griechen neu	Röm.	Hebr. alt	Hebr. neu	Ind. a.	Ind. n.	Arab.	Mittelalter	wir
Zählen	𒐈	III	III	γ	III	שלש III	ג	≡	३	٣ ج	III	3
	𒁹𒎙𒐋	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𐅄ΔΔΔΓΙ	πς	LXXXVI		פו	Φ4	८६	٨٦ فو	LXXXVI	86
Rechnen	Position ohne Null	additiv	Rechenbrett			?		?	Position		Rechenbrett	Pos.

An den Schluss von Kap. IV stellen!

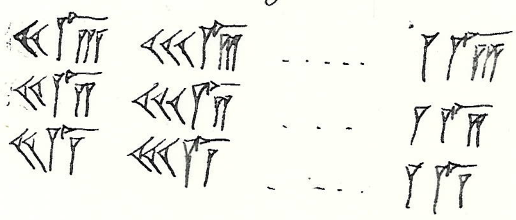
Mehrere Ziffern für Zahlen
3
30
85
508

1202 „Liber Abaci" von Leonardo Pisano
1299 Verbot in Florenz seit Anf. 14. Jhr. Sieg in Italien
seit „ 16. „ „ „ Deutschl.

β. Addition und Subtraktion.

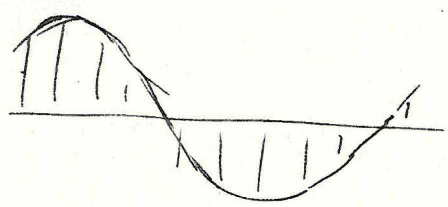
Trivial ausführbar, da äquivalent mit „Zählen".

Bemerkung: „Subtraktive" Zahlbildungen („un de viginti")

 alt-auch  1)

Hinweis auf später für Auftreten von Null und negativen Zahlen bei algebraischen Problemen (Kap. V, §2). Verwendung von „Vorzeichen" in späten astron. Texten

26, 21
31, 23, 30
31, 47, 30
23, 15
7, 35
11, 57, 30
25, 2, 30
31, 20
31, 50
25, 48, 30
11, 43, 30
9, 9



1) Weitere schöne subtraktive Schreibungen vgl. Deimel ŠL 186

γ. Multiplikation und Division.

Division: Zurückführung auf Multiplikation durch

$\frac{b}{a} = b \cdot \bar{a}$ und $\bar{a}$ aus Reziprokentabelle.

Problem: Division durch irreguläre Zahlen. Formulierung von $\frac{b}{a} = x$ „was mit a multipliz. das b gibt" $(xa = b)$

Multiplikation: Tabellentexte.

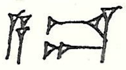
a. Vollständiges Schema: 1770 Produkte einstelliger Sex.-Zahlen:

1	59	58
2	1,58	1,56
3	2,57	3,54
58	57,2	56,4
59	58,1	

3	2	1
6	4	
9		

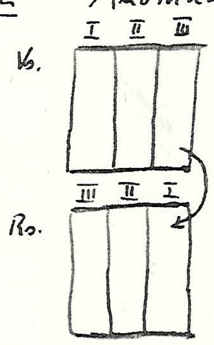
oder, als Einzeltabellen, 58 Tabellen für alle „Kopfzahlen" $2 \leq k \leq 59$.

b. Beispiele von Tabellen

7  1	7	16,40 a-rá 1	16,40
a-rá 2	14	a-rá 2	33,20
a-rá 3	21	a-rá 3	50
u.s.w.		u.s.w.	
a-rá 19	2,13	a-rá 19	5,16,40
a-rá 20	2,20	a-rá 20	5,33,20
a-rá 30	3,30	a-rá 30	8,20
a-rá 40	4,40	a-rá 40	11,6,40
a-rá 50	5,50	a-rá 50	13,53,20
		16 a-rá 1	16 „Anschlusszeile"

„Einzeltabellen"

„Kombinierte Tabellen" Anordnungsschema der Kolumnen:



c. Zusammenhang zwischen Multiplik.-Tabellen und Bruchrechnung.

Schema d. Einzeltabellen (s. Fig.); Anschlusszeilen zeigen die Existenz einer kanonischen Ordnung.

Schema d. Kombinierten Tabellen (s. Fig.)

Ergänzungsmöglichkeit von Tabellentexten (s. CBM 10219 u. 19790)

Schema der Kopfzahlen: Zahlen aus der rechten Seite (ā) einer 2-stelligen Reziprokentafel

Zusammenhang dieser Auswahl mit der Frage d. absol. Stellenwertes

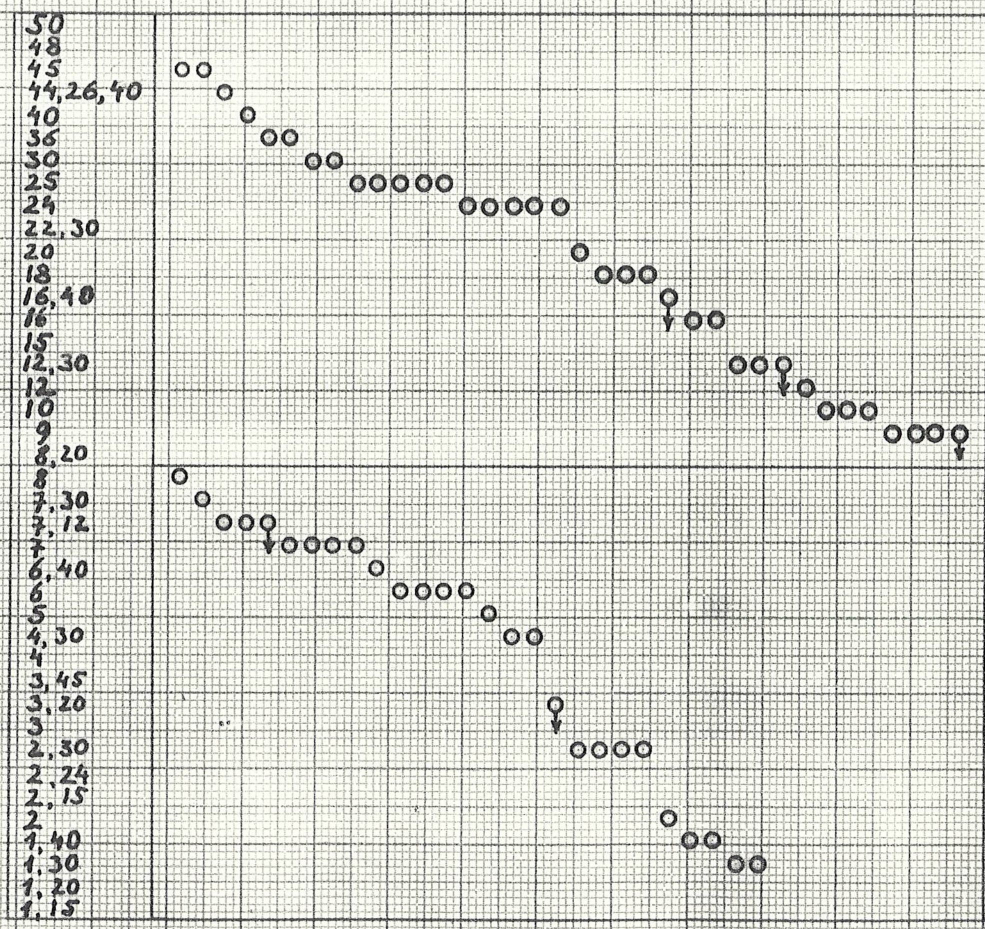
a	$\bar a$
2/3 von 1	0;40
1/2 von 1	0;30
⋮	
1/54	0;1,6,40
1/1,0	0;1
1/1,12	0;0,50
⋮	
1/57,36	0;0,1,20
1/1,0,0	0;0,1

$$\frac{1}{54} \leqq \bar a b \leqq 40$$

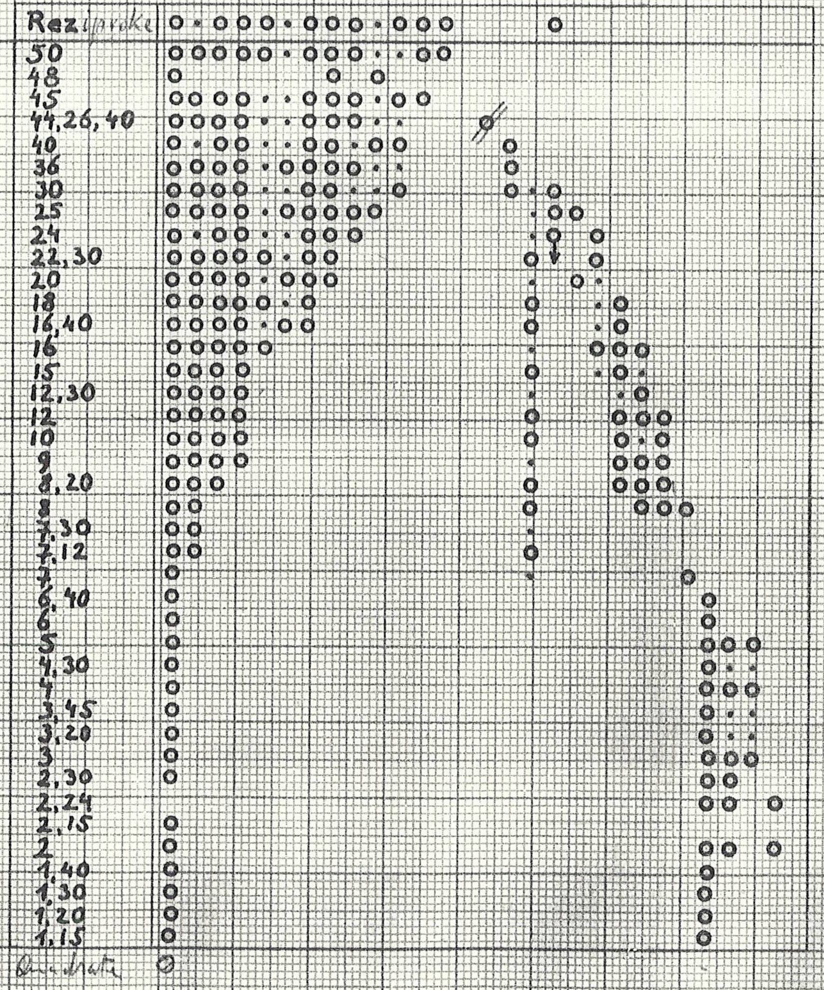
$$1 \leqq b \leqq 59$$

$$\frac{1}{57,36} \leqq \bar a b \leqq \frac{59}{72} < 1$$ also echte Brüche

Einzeltabellen



kombinierte Tabellen



Sinn der 6-Eck-Figur: sowohl a wie ā enthalten, also nicht Stellenzahl der Tabelle maßgebend (Umfangs-<u>Bereich</u>) sondern Zugänglichkeit sowohl von a wie ā. Bei Reg. Tabellen ist das überflüssig, denn da ist a ā durch bloße Spaltenvertauschung ersichtlich; bei Mult.-Tab. ist aus der Tabelle über Kā <u>nichts</u> über Ka ersichtlich!

Also: Gesamtheit der $\bar{a}$ einer Reziprokentabelle enthält die ersten „Stammbrüche", Gesamtheit der „Multiplikationstabellen" gibt die „Sexagesimalentwicklung" aller „echten Brüche" < 1 und $> 60^{-2}$ — bei „naivem" Lesen der Zahlen.

Adjunktion der Tabelle der Kopfzahl 7 macht aus diesem speziellen Schema von Multiplikationstabellen ein „echtes" für alle Produkte mit

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50

Geschichtliche Einsicht: zentrale Bedeutung der Bruchrechnung. Schema:

Bruchrechnung

Reziprokentabellen für $\frac{1}{a}$ („Stammbrüche") — „Multipl."-Tab. für $\frac{b}{a}$ („gemischt. Brüche" ohne echte) } Phase der „absoluten" Zahlzeichen

↓ ↓

$a\bar{a} \equiv 1$ (fact. 60) — allgem. Mult.-Tab. für alle ab } Phase der bewussten „Position"

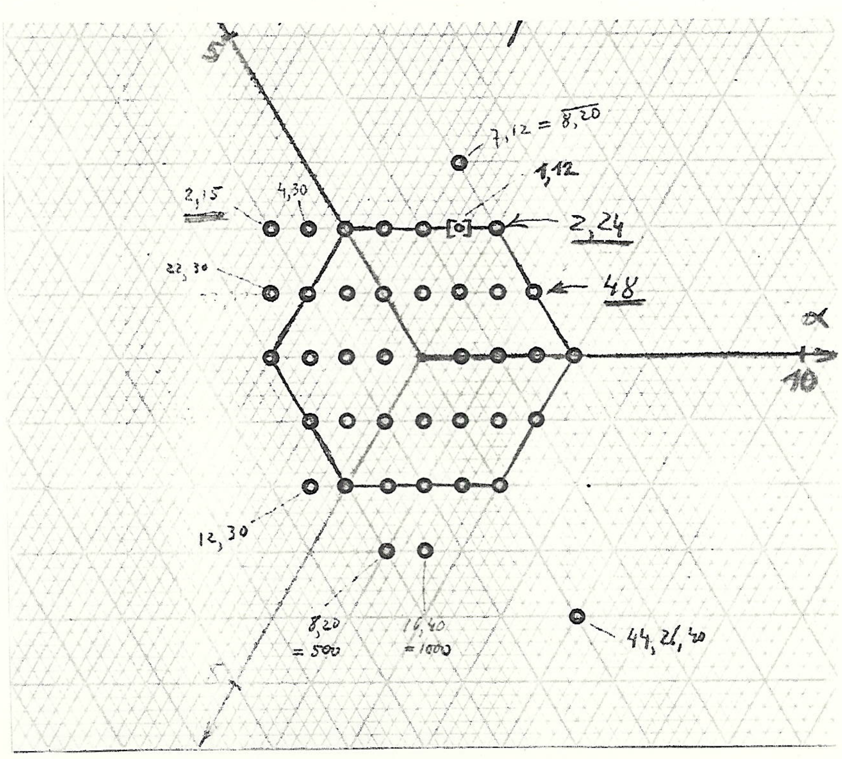
1	50	40	30	20	10	9	8	7	6	5	4	3	2
2													
⋮													
19													
20													
30													
40													
50													

+ restliche $\bar{a}b$

Einzelfragen.

2. 3. 34.

1. Auswahl-Frage d. Kopfzahlen der Mult.-Tabellen aus der Rez.-Tabelle
2. Terminologische Typen der Mult.-Tabellen; Verteilung auf Einzel- und Kombinierte Tabellen.



oft ausgelassen
48
2,24
2,15

3. Einzeldiskussion von A20 + VAT 9734
   α. Anordnung der Einzeltexte (Schlüsse a^2 und $\bar{a}$)
   β. Serienordnung des ganzen Systems (Rez. → Mult. → Quadr.)
   γ. Dezimale Methodologie bei 1,40

δ. Quadrate und Kuben.

$\boxed{6.\ 3.\ 34.}$

Tabellentexte der Form:

<u>Quadrate:</u> n a-rá n n^2
oder n n^2

gehören hinter die Mult.-Tab. gemäss der Serienordng. von A20+VAT 9734

<u>Quadratwurzeln:</u> n^2-e n íb-si$_8$ u. ä

<u>Kuben</u> fehlen

<u>Kubikwurzeln</u> n^3-e n ba-si
n^3-e n ba-si-e u. ä.

<u>n zu n^2+n^3:</u> (n^2+n^3)-e n ba-si

z. B. 5, 4, 12-e 26 ba-si
5, 40, 12-e 27 ba-si
6, 18, 56-e 28 ba-si u. s. w.

Sämtliche Tabellen (im Prinzip) von $n = 1$ bis $n = 1,0$
Hinweis auf die Mehrdeutigkeit der Terminologie.

ε. Interpolationsproblem.

<u>1.) Vorbemerkung.</u>

σ „arithmet." Mittel zw. a und b : $\sigma = \frac{a+b}{2}$

τ „harmonisches" Mittel zw. a und b $(a > b)$:

$\left.\begin{array}{l}a-\tau \text{ derselbe Bruchteil von } a\\ \text{wie } \tau - b \text{ von } b\end{array}\right\}$ $\frac{a-\tau}{a} = \frac{\tau - b}{b}$

oder $\tau = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\sigma}$

oder $a : \tau = \sigma : b$

Beispiel: die 4 Zahlen

$(a, \sigma, \tau, b) = (6, 8, 9, 12)$

stehen in „vollk." od. „harmon." Prop. denn

$\frac{8}{6} = \frac{9}{12}$ ... Quarte $\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$ ... Quinte $\frac{12}{6}$ ... Oktave

$\frac{9}{8} = \frac{9}{6} : \frac{6}{8}$ .... Quinte „–" Quarte = Sekunde

so nach Nikomachos (+100) und Jamblichos (+300) und Legende von der Einführung aus Babylon durch Pythag. nach Griech.

2) Approx. von irration. $\sqrt{a}$.

I. Allgemeines

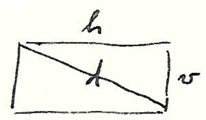
$\alpha_1 \sim \sqrt{a} \quad \longrightarrow \quad \beta_1 = \frac{a}{\alpha_1} \sim \sqrt{a}$ triviale Approx.
z.B. nächste Quadratzahl

z.B. $\alpha_1 < \sqrt{a} \quad \rightarrow \quad \beta_1 > \sqrt{a}$

$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \sim \sqrt{a} \quad \rightarrow \quad \beta_2 = \frac{a}{\alpha_2} \sim \sqrt{a}$

aber $\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2} = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}$

d.h. „arithm." und „harmon." Mittel bilden die Näherungen zweiter Ordnung (zwischen 2 trivialen Näherungen)

Beispiel: 

$d = \sqrt{h^2 + v^2} \quad h > v$

$\alpha_1 = h$

$\beta_1 = h + \frac{v^2}{h}$

$\alpha_2 = h + \frac{v^2}{2h}$

$\beta_2 = \frac{2h^3 + 2v^2h}{2h^2 + v^2}$

II. VAT 6598 (Photogr. + Autogr.)

Ein Tor, Weite (v) 0;10 Höhe (h) 0;40 Diag. (d) ?[1]

[1] Maßeinheit GAR = 6 m

1.) 0;10 Weite quadr. = 0;1,40	v^2
$\overline{0;40}$ mit 0;1,40 = 0;2,30	$\frac{v^2}{h}$
$\frac{1}{2}$ von 0;2,30 = 0;1,15	$\frac{v^2}{2h}$
0;1,15 zu 0;40 Höhe add. = 0;41,15	
0;41,15 ist die Diag.	$h + \frac{v^2}{2h} = d$ ①

2) 0;10 Weite quadr. = 0;1,40 | v^2

0;1,40 mit 0;40 mult. = 0;1,6,40 | v^2h

verdoppelt 0;2,13,20 | $2v^2h$

zu 0;40 Höhe add. = 0;42,13,20

0;42,13,20 ist die Diag. | $h + 2v^2h = d$ (2)

Erklärung von (2):

$$\beta_2 = \frac{2h^3 + 2v^2h}{2h^2 + v^2} = \frac{2h^3}{2h^2+v^2} + \frac{2v^2h}{2h^2+v^2}$$

$$\approx \underset{\substack{(2h^2 \gg v^2)\\ \text{(vergr.)}}}{\frac{2h^3}{2h^2}} + \frac{2v^2h}{2h^2+v^2} = h + 2v^2h \cdot \underset{\substack{55\\ \text{(igi von diag)}}}{\overline{0;55}} \approx \underset{\text{(verkl.)}}{h + 2v^2h}$$

also doppelte Näherung im entgegenges. Sinn (eine aus rechentechn. Gründen)

[Korrekte Werte wären folgende: $d = \sqrt{0;28,20}$

$\alpha_2 = 0;41,15$ (Wert des Textes; s. (1))

$\beta_2 = 0;41,12,41,\dots$

$d \approx 0;41,13,51,\dots$]

III. Andere Beispiele.

$\sqrt{2} \approx 1;25$ $\qquad \alpha_1 = \frac{3}{2} \qquad \sqrt{2} = \sqrt{(1;30)^2 - 0;15}$ $\qquad$ (denn $(1;30)^2 = 2;15$)

$$\approx 1;30 - \frac{0;15}{2 \cdot 1;30} = 1;25$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0;42,30$[1] $\qquad \alpha_1 = \frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(0;40)^2 + 0;3,20}$

(denn $(0;40)^2 = 0;26,40$)

$$\approx 0;40 + \frac{0;3,20}{2 \cdot 0;40} = 0;42,30$$

1) $\overline{1;25} \neq$ endlich Sex.-Br.

Ganz anderes Approximationsverfahren angewandt bei $\sqrt{2;30}$. Führt auf die Aufgabe zwei Quadratzahlen so zu bestimmen, dass $\boxed{\text{9.3.34.}}$

$\square + s = \square$ (s gegeben) also Spezialfall von

$x^2 - dy^2 = 1$?

Gegeben: $\begin{cases} a_3^2 - a_2^2 = 22;30 \\ a_3 = 5 \end{cases}$

Also a_2 zu berechnen aus $\sqrt{25 - 22;30} = \sqrt{2;30} = a_2$

Text: Was zu 22;30 zu addieren, so dass die Summe ein Quadrat ist und der Summand ein Quadrat?

$5;3,45$ addiere $= 27;33,45$. $\sqrt{27;33,45} = 5;15 = a_3'$

$\sqrt{5;3,45} = 2;15 = a_2'$

Bedeutung:

$$a_2^2 + 22;30 = a_3^2 = 25$$

wird ersetzt durch

$$a_2'^2 + 22;30 = a_3'^2 \quad \text{so dass} \quad a_2'^2 = \square \quad a_3'^2 = \square$$
$$\text{und } a_3' \approx a_3$$

Dies leisten

$$a_2'^2 = 5;3,45 = (2;15)^2$$
$$a_3'^2 = 27;33,45 = (5;15)^2 \qquad 5;15 \approx 5$$

Also modifizierter Wert von a_3 verwendet:

$$a_3' = 5;15$$

Das ergibt rationale Wurzel $\sqrt{5;15} = 2;15$ für a_2'.

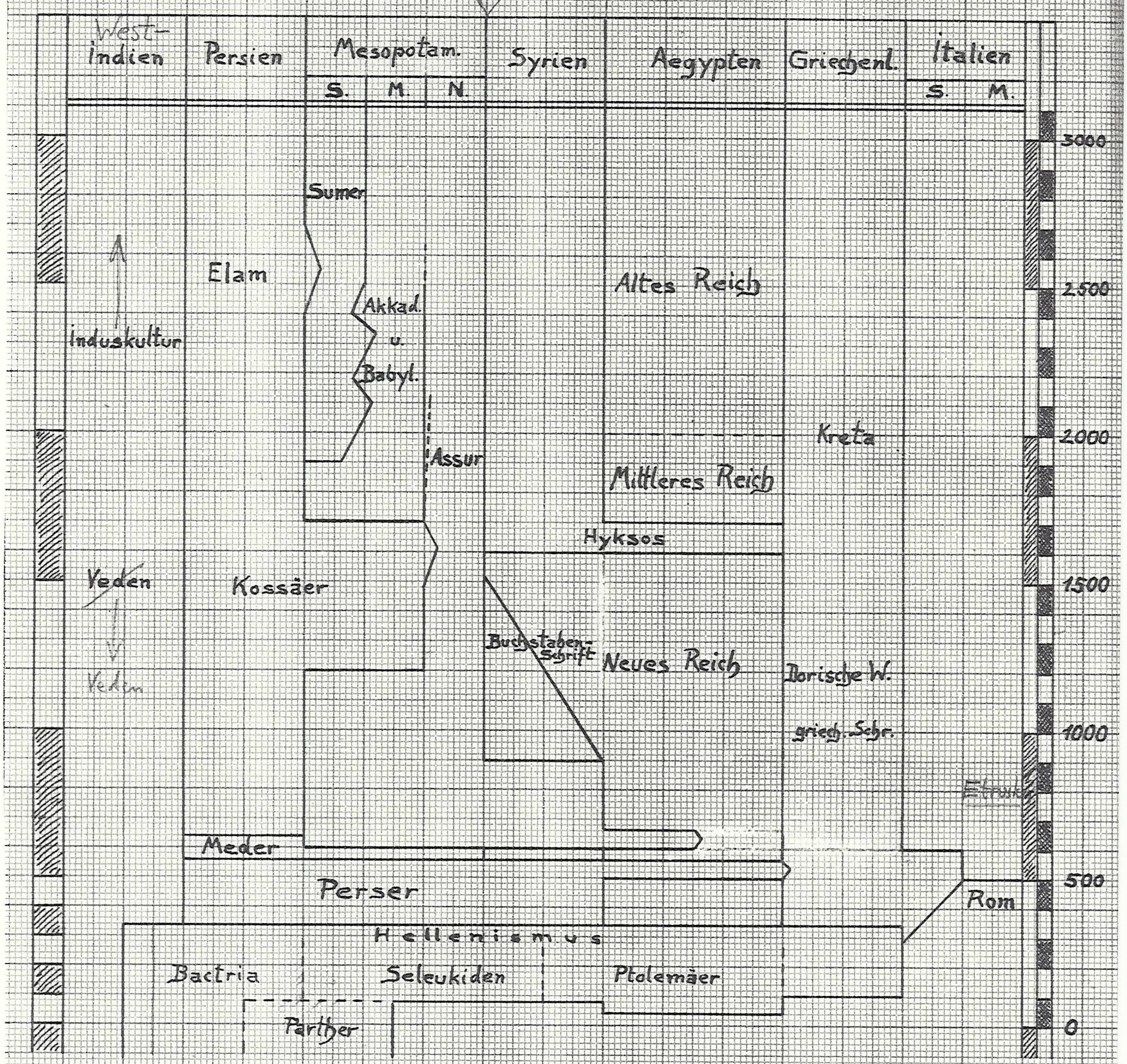
[Korrekt wäre: $a_2 = \sqrt{2;30} \sim 1;35$.]

§. Schlussbemerkung zur Rechentechnik.

Add. u. Mult. durch Zahlensystem trivial. Mult. u. Divis. und Zusammenhang mit System der Tabellentexte im wesentlichen geklärt; aber auch hier führt das Problem der Division durch irreguläre Zahlen zur Frage der Interpolation, d. h. zur Bestimmung von Näherungsausdrücken für ∞-Prozesse.

Restliches Tabellensystem ebenfalls zunächst unklar (vgl. Kap. V.).

Literaturverzeichnis zu Kap. I.


West-
Indien
Persien
Mesopotam.
S.
M.
N.
Syrien
Aegypten
Griechenl.
Italien
S.
M.
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
Sumer
Elam
Akkad.
u.
Babyl.
Induskultur
Altes Reich
Assur
Kreta
Mittleres Reich
Hyksos
Veden
Kossäer
Buchstaben-
Schrift
Neues Reich
Dorische W.
griech. Schr.
Etrusk
Meder
Perser
Rom
Hellenismus
Bactria
Seleukiden
Ptolemäer
Parther

13. 3. 34.
u.
20. 3. 34.

Kapitel II.

Allgemeingeschichtliches.

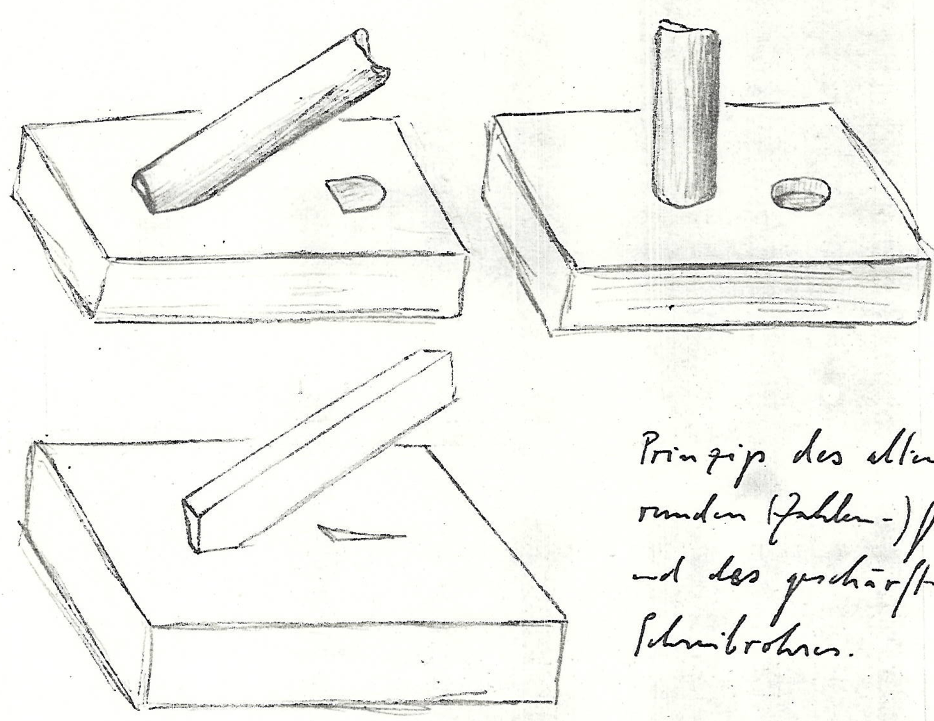
§1. Chronologische und geographische Übersicht.

Allg. (s. Fig. u. Kartenskizze)

spez. Babylonien (Kartenskizze)

§2. Prinzip der Keilschrift.

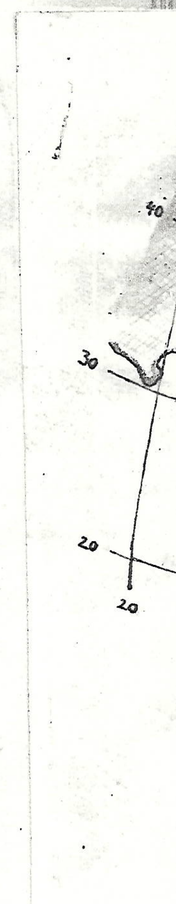
α. Schreibtechnik.
Schreibmat. Ton, nachher gebrannt oder luftgetrocknet.
Archaische u. jüngere Zeichenformen.



Prinzip des alten runden (Zahlen-)Griffels und des geschärften Schreibrohres.

β. Zeichenentwicklung. ~~Schriftentwicklung aus Bilderschrift~~
Entwicklung aus Bilderschrift. Linearisierung.
Drehung der Bildzeichen; auf sumerischen Denkmälern in Bild-stellung, auf akkad. u. später um 90° gedreht 1).

1) s. Poebel GSG §11.

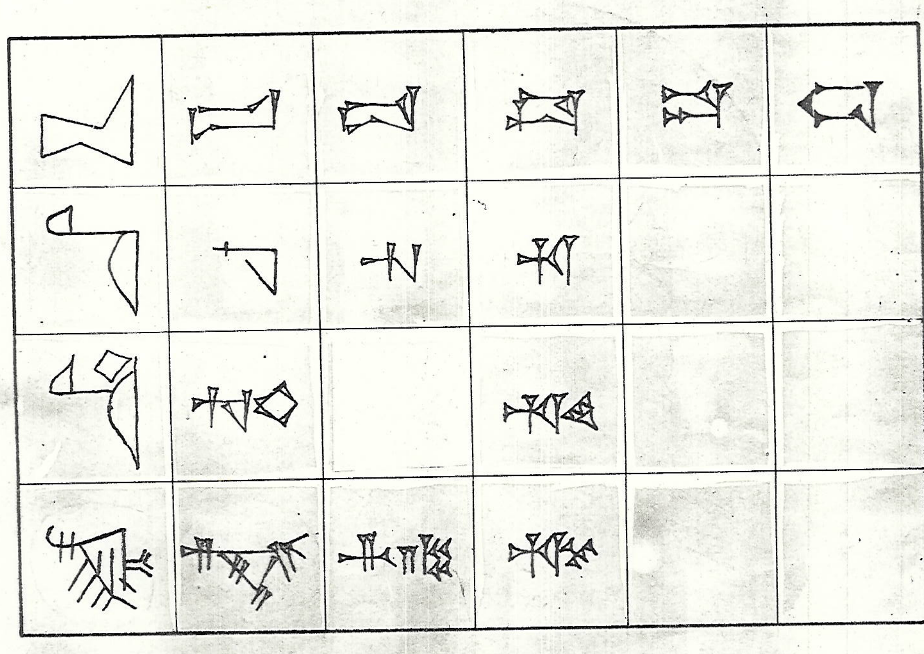


13. ~~3~~ 3. 34.

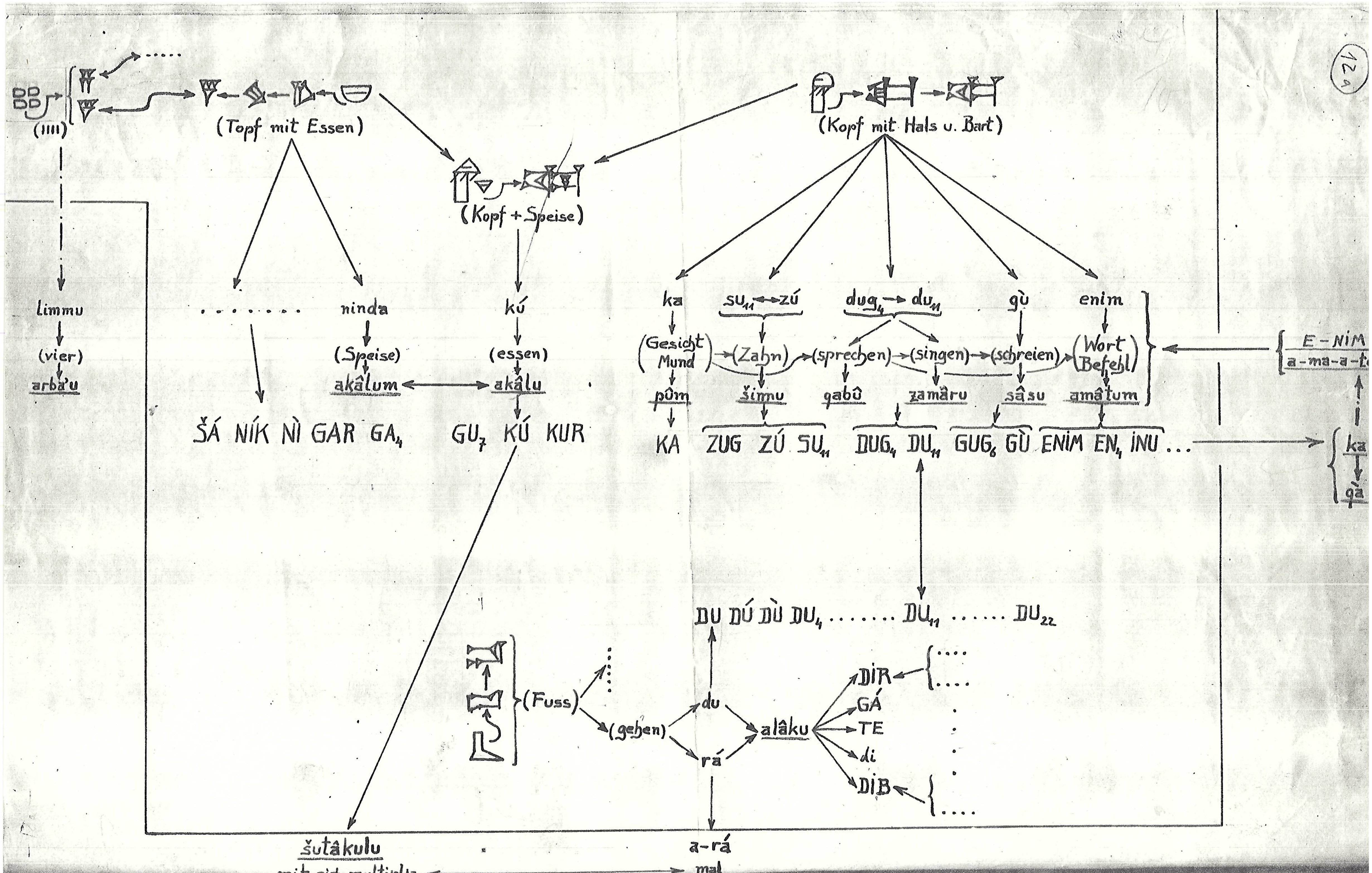
u.

20. 3. 34.

Figur



1) s. Poebel GSG §11.


12a
(IIII)
(Topf mit Essen)
(Kopf + Speise)
(Kopf mit Hals u. Bart)
limmu
(vier)
arba'u
. . . .
ninda
(Speise)
akâlum
kú
(essen)
akâlu
ŠÁ NÍK NÌ GAR GA₄
GU₇ KÚ KUR
ka
(Gesicht Mund)
pûm
KA
su₁₁ zú
(Zahn)
šinnu
ZUG ZÚ SU₁₁
dug₄ du₁₁
(sprechen)
(singen)
gabû
zamāru
DUG₄ DU₁₁
gù
(schreien)
šâsu
GUG₆ GÙ
enim
(Wort Befehl)
amâtum
ENIM EN₁ INU . . .
E-NIM
a-ma-a-t
ka
qà
DU DÚ DÙ DU₄ . . . . DU₁₁ . . . . . . DU₂₂
(Fuss)
(gehen)
du
rá
alâku
DIR
GÁ
TE
di
DIB
šutâkulu
mit sich multipliz.
a-rá
mal

8. Entstehungsgeschichte der Lautwerte der Keilschriftzeichen. (Vgl. Übersicht).

Einzeldiskussion:

1.) „KA." Bedeutungswandlung Gesicht → Befehl
Lautäquivalenz $sag_{11} \leftrightarrow$ zú
Lautverschleifung $dug_4 \rightarrow du_{11}$

Ergebnis: zahlreiche Lautwerte für 

2.) Akkadische Auswahl (ka) und Abspaltung ka – gà.
Damit Prinzip der Akkad. Silbenschrift.
(Derartig syllabisch geschriebene Vokabulare für uns die Basis zur Erschließung des Sumerischen[1]).

[1] s. Anh. (8.)

3) Verwendungsmöglichkeit der Sumer. Zeichen als „Ideogramme" für akkad. Worte.

4.) „DU … DU_{22}". Mehrfache Ausdrucksmöglichkeit eines Lautwertes durch verschied. Zeichen

5) Entstehung von DU. Mehrfachheit der ideograph. Schreibungen für ~~[illegible]~~ akkad. Worte

6.) „GAR"

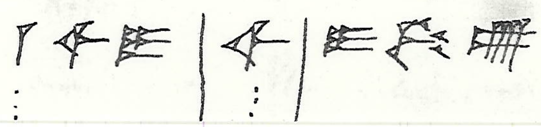
7.) Zeichenidentifizierung auf rein graphischer Basis GAR ↔ 4.

8.) „KÚ". Prinzip der Zeichenkombination.
— Ergebnis: ca 4200 Silbenwerte für 600 Zeichen.
 Eine prinzipiell neue Schicht von Bedeutungswandlungen und ideogr. Möglichkeiten bei der Weiterbildung der gewöhnlichen Sprache zur speziellen mathem. Fach-Terminologie.

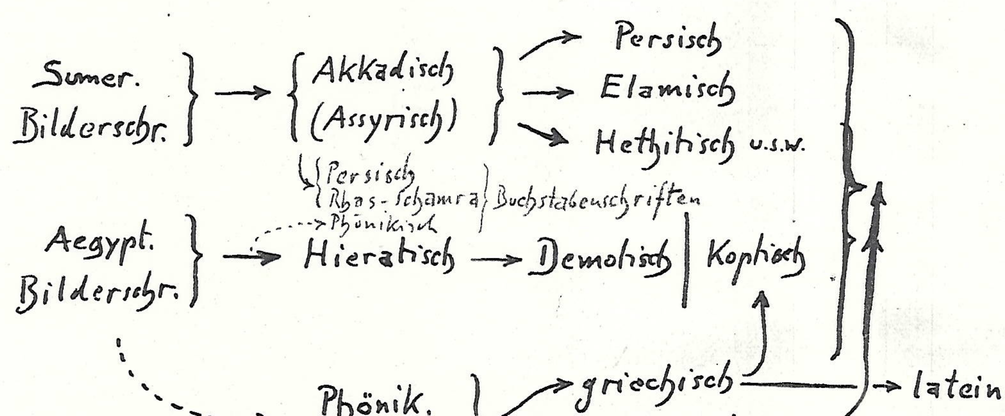
Anhang:
8. Methoden zur Feststellung von Lautwerten d. Keilschr.-zeichen und d. akkad. Aequivalente.

Unter d. Vorauss. dass die akkad. Lautwerte d. Zeichen bekannt.

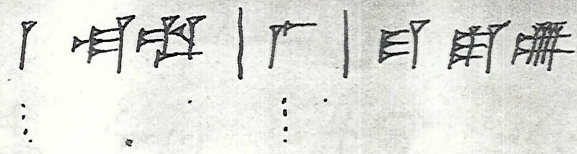
1.) „Syllabare".

S^A. Beispiel I | II | III [2]


[2] II | III ≈ | ω | ωμεγα |



Sumer.
Bilderschr.
Akkadisch
(Assyrisch)
Persisch
Elamisch
Hethitisch u.s.w.
Persisch
Rhas-Schamra
Phönikisch
Buchstabenschriften
Aegypt.
Bilderschr.
Hieratisch
Demotisch
Koptisch
Phönik.
Buchstaben
griechisch
aramäisch
hebräisch
latein.

§B - 

la- al | | ma-lu-ú (voll sein)[1)]

> 1) Beispiel so ausbauen, dass bei §A noch i-gi vorkommt und für §B ein Syll. für igi genommen wird.

2.) Methode der Parallelstellen z.B. RI → pi-ir-kam.

3.) Phonetische Komplementierung die durch a-šà^{lam} → eqlam^{lam} verlangt und z.B. gagarum ausschliesst.

§3. Aegyptische Schrift.

Hieroglyphisch → hieratisch → demotisch

(Übersicht über Zeichenentwicklung)

parallel geht auch eine Umbildung der Sprache von Altaegyptisch zu Neuägyptisch zu „demotisch" und schliesslich Koptisch das mit griech. Buchstaben (im Wesentl.) geschrieben wird.

Analogie zur Schriftgeschichte der Keilschrift. Wesentl. Unterschied, dass (s. Übersicht)

Babyl. { Schrift linear umgebildet
Sprache verzweigt: Sumer. → Akkad. (Assyr.) → Persisch, → Elamisch, ~~[illegible]~~; → Hethitisch

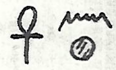
Aegypten { Schrift verzweigt: Hierogl. → Hierat. → Demot. | Koptisch (d.h. griech.); → Hieroglyph.
Sprache linear umgebildet

Zeichenübersicht:

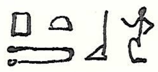
𓈖 n (Wasser)
𓂋 r (Mund)
𓇳 rꜥ (Sonne)
𓉐 pr (Haus)
𓋹 ꜥnḫ (Sandalenriemen)
𓆣 ḫpr (Käfer)

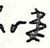
Prinzip des 3-Konsonantismus; „Hebräische" „syllabische Schreibung".

Phonetische Komplementierung:

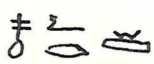
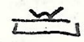
 ḫpr(r)  ʿnḫ (n ḫ)

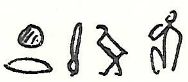
Determinative:

 ptḥ (Name)  Mann <u>kein</u> Lautw.

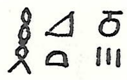
 rnp.t Jahr   Sonne Lautw. rʿ (+t Femininum)

 pr gehen  gehende Füsse (Lautw. iw)

 nfr gut  Buchrolle kein Lautw.

 ḫrw Stimme  reden, essen kein Lautw.

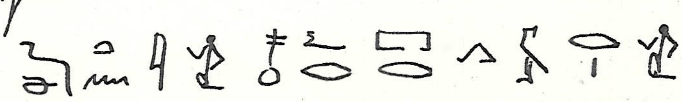
Pluraldeterminativ

 ḥḳ.t Bier

Identitätszeichen

 pr Haus  nb Korb  ~~Mu~~ rʾ Mund

Beispiel:[1)]



ḏdtnj nfr pr m rʾ-j

Was ich gesagt habe (ist) Gutes (das) herausgeht aus meinem Munde

nfr ḏdtj ir mj ink Ḥzj

Das Gute das ich sage geschieht auch (denn) ich (bin) Ḥzj

1) Sargtext (ÄZ 65, 81)

<u>§ 4. Weiteres zur Keilschrift und Allgemeines zur altorientl. Philologie.</u>

<u>α. Sprachfamilien.</u>

Sumerisch: „agglutinierende" Sprache

Akkadisch: „flektierend"; <u>semitische</u> Sprache.

Aegyptisch: alte semitische Abzweigung mit hamitischen Einflüssen.

Prinzip der semitischen Flexion: 3-Radicale ($c_1 c_2 c_3$) und 3 freie Vokalstellen ($\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$) also sozusagen Funktion von 3 Argumenten: $f(c_1, c_2, c_3; \underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_2}, \underline{\alpha_3})$ mit 3 Parametern.

Typus: die vier Hauptstämme des 3-rad. Verbums [1]

prs (schneiden).

	Stamm	Praesens	Perfekt.	
I (Qal)	$c_1 c_2 c_3$	i a a (iparas)	i 0 u (iprus)	Grundstamm
II (Paal)	$c_1(c_2c_2)c_3$	u a a (uparras)	u a i (uparris)	Intensiv
III (Schafel)	$\check{s}(c_1c_2)\,c_3$	u a a (ušapras)	u a i (ušapris)	Kausativ
IV (Nifal)	$(nc_1 \downarrow c_1c_1)\, c_2 c_3$	i a a ipparas	i a i (ipparis)	Passiv

Gegensatz: Agglutinierend: Konstanter Stamm.
Grammatische Funktionen: Funktions-Schachtelung

$$f_n(f_{n-1}(f_{n-2} \ldots f(G)))))..)$$

wobei G der Stamm und die Operationszeichen ~~..~~ meist durch Suffixe aber auch durch Praefixe ausgedrückt sind. Diese Schachtelung hat ~~zur~~ Folge die „Kettenbildung". Demgegenüber die flektierenden Sprachen

$$f_1 + f_2 + \cdots .$$

Starre Satzstellung (Subj → Obj → Verb). (Nomen + Adj) {Postpos. Plural.

Beispiel: Sumerisch gar (legen)

igarren Behaupt.
gagar Wunsch
~~..~~gagarra Befehl
abgar {Kaus.
ingarren } Behaupt.
gangar
garran
mungarren
bigarren
gabigar
gargar
⋮

[1] Vgl. Misteli, Sprachwissensch. II S. 427: τὰ φωνήεντα τῇ ψυχῇ ἐοίκασι, τὰ δὲ σύμφωνα τῷ σώματι.

NB. Dies die Ursache der Vokallosigkeit d. aeg. Schrift, denn Bilderschrift ist gerichtet nur „Bild" ≡ Sache an sich, gleichgültig um grammatische Relation. Also Bild ↔ $c_1 c_2 c_3$ und nicht $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

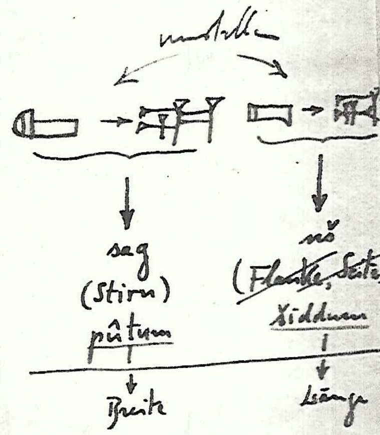
β. Schreibweise akkadischer Texte

Beispiel eines mathem. Textes

3 a-rá 2 6 igi 6 gál 10 i-na-di-kum

10 i-na 7 ki-im-ra-ti-i-ka uš ù sag

a-na-sà-ah-ma 6,50 ša-pi-il$_5$-tum



1.) Sexages.-Stellen: $3 \cdot 2 = 6$ $\bar{6} = 0;10$ $7 - 0;10 = 6;50$

2.) Ideogr. Schreibungen von ~~[illegible]~~ sag uš = šiddum, sag = pâtum; statt dessen wäre es möglich statt šapiltum dirig zu verwenden u.s.w.

3.) Allmähliche Zunahme der ideogr. Schreibungen in späteren Texten. Bedeutung als Operationssymbole.

13. 4. 34.

γ. Die Keilschriftliteratur überhaupt.

Schulen und Priesterschaft
Tempelarchive
Staatliche Archive
Archive von Geschäftshäusern

Datierungen; nach Äusserlichkeiten effektive
der Tab.-Texte | d. eig. math. T.

Assurbanipal-Bibliothek i. Ninive (668–626) u. Bibl. v. Uruk. Philol. bis in Seleukid. Zeit hinein (vgl. die griech. geschr. sum.-akk. Vokabulare).
Astron. Schulen: Uruk-(Babylon-Borsippa)-Sippar.
Einzelheiten s. Meissner BA 2, S. 324 ff.

δ. Anhang I. Äussere Technik d. Bearb. v. Keilschrifttexte.

Ausgrabungen (alte u. moderne Technik (Bild)); Teilung der Funde
Konservierung[1]
Editionen; Autogr. u. Transcr. (Bild)

[1] Bild MDOG 66, 20

20. 4. 34.

ε. Anhang II. Erschliessungsgeschichte

Aeg. Entzifferungsgeschichte durch Champ. relativ einfach durch Konstanz d. Hierogl.-Schrift, stetige Entw. d. Sprache ins (bekannte) Koptisch und ausführlichen griech. Bilinguen.

Wesentlich die psychol. Schwierigkeiten; mystische Interpretation der Hieroglyphen.

1761 – 1765 Kg. Friedr. V v. Dänem. Expedition nach Arabien – Babyl. – Persien. Nur als Mathem. beigegeben Karsten Niebuhr. Er kopiert trilingue Inschrift aus Persepolis. Drei Sprachen in Keilschr. geschrieben

1.) Altpersisch (Zend) ca 40 verschied. Zeichen + Worttrenner

2.) Elamitisch > 100 verschied. Zeichen "

3.) Babylon. zahllose Zeichen.

Entzifferung von 1.) 1802 Grotefend

Grotef.: Darius rex fortis, rex regum, rex Daharum, Hystaspis

richtig: " d. grosse Kg. " " " d. Landes, d. H.

G.: stirps, mundi-rectoris in constellatione moro τοῦ Ized

r.: Sohn, d. Achemeniden welcher diesen Palast gemacht hat

1835 ff Rawlinson unabhängig von ihm durch II-Inschriften

.... y ..... z .... z Sohn von y
.... x ..... y .... y " " x } x → y → z

Versuch mit Hystaspes → Darius → Xerxes.

Glück: Wenig achem. Könige, Persisch im Prinzip bekannt (Zend), Schrift eine Buchstabenschrift

Entzifferung von 2) 1844 ff von Westergaard (durch Namen)

Seit 1842 (Botta) Ausgrabungen in Babylonien insbes. in Kujunğik (Dur-Šarrukin) und Nimrud 1845 ff (v. Layard)

Entzifferung von 3.)

1846 ff Hincks Namen liefern Zeichenwerte
1852 ff Rawlinson mit Einsatz semit. Philol.
1855 ff Oppert Syllabare lip | li-ip ; kal | ka-al u.s.w.

1857 Konkurrenz d. Royal As. Soc.

1872 Grabung v. Rassam in Kujunğik und dort der 1873 v. G. Smith übers. Sintflutbericht. Bis 1876 ca 20.000 Texte der Assurbanipal-Bibl.

1875 ff „Sumerische Frage" 1898/99 Th.-Dg. Rech. Orig. Écr. Cun.
1914 Delitzsch Sumer. Glossar

Kapitel III. Zahlensysteme

§ 1. Allgemeines.

27. 3. 34.

α. Einleitung.

Gang der Vorlesung:

Kap. I Endergebnis: babylon. Rechentechnik: sexagesim. Darstllg. d. Rationalzahlen; Rechnen nach den Regeln eines vollen Positionssystems.

Als „Atavismen" zeigen sich:

1.) Mult.-Tabellen erst sekundär ~~als~~ bloße Rechenhilfen für $a \cdot b$ und primär für $a \cdot \frac{1}{c}$ also Grundproblem die Bruchrechnung. Speziell sogar

2a) für die echten Brüche: $\frac{a}{c} < 1$. Dazu stimmt

2b) Die Rez.-Tab. beginnen mit 2/3 40, Hälfte 30 also mit positionslosen Zahlen. D.h. beides: zunächst keine Position

3) Die Zahlzeichen selbst keineswegs „sexagesimal" (d.h. 59 verschied. Symbole!) sondern
a) dezimal ~~…~~ (positionslos) b) additiv aufgebaut:

Kap. II. Allgemeingeschichte d. vorderen Orients i. d. Antike. Beherrscht durch den Dualismus Aeg : Mesopot. Sozusagen simultane Realisierung zweier großer Versuchsreihen: Aegypten lineare Entwicklung seit vorgeschichtlicher Zeit. Mesopot: Kulturwechsel nach der ersten Hochblüte (Sumerer ≈ AR). Speziell verfolgt an Schriftgeschichte; dieser Dualismus äussert sich aber auch in der Aufklärung Mathem. Ideenbildung wesentlich.

Kap. III u. IV. Entstehung eines „Zahlensystems" und Auswirkung seiner Struktur auf die Mathem. (solche Einflussmöglichkeit schon berührt: Ideogrammschrift → Algebraische Symbolik und Positionsschreibung → Befreiung von „Bruchrechnung")

Schwierigkeit: Zurückreichen d. Zahltyp. in vorhistor. (d.h. schriftlose) Zeit, daher nötig noch andere Kulturen („Primitive") heranzuziehen. Hilfe: Vereinheitlichung des Problems, da auf dieser Stufe sumer. 𒌍𒐈 völlig äquival. äg. ∩∩III. Ferner Konservatismus aller Sprachen, so dass Material ausreichend.

Also Problemlage: Histor. gegeben ein (dezimales) Zahlensystem mit „Individualzahlzeichen" geschrieben (äg. I ∩ 𓍢 𓆼). Frage: wie weit ist ein solches „System" geschichtlich bedingt, wie weit ist es überhaupt ein konsequ. „System"?

Arbeitsmethode sehr stark Unters. v. Sprachen. Aber nur Sprache als Mittel zur Aufdeckung von Prozessen im Zahlbegriff, nicht selbst als Problem verfolgt, wie weit sich überhaupt Denktypen und Sprachbildungen aufeinander abbilden. Dies würde auf Fragen führen, die allen Kulturen gemeinsam und das engere Thema der alten Mittelmeerkulturen verlassen.

β. „Zahlensystem" als Ganzes. Problemstellung.

„Zahl" posit. ration. Zahl.

„Konsequentes Zahlensystem": „Basis" g ganze Zahl > 1

$$a = \sum_{-\infty}^{N} \alpha_\nu g^\nu \qquad 0 \le \alpha_\nu < g$$

Ein „Kons. Z.-S." als Ziffernsystem nur einmal realis., als Sprache nie. Bereits hier: Dissonanz zw. Schrift u. Sprache[1]

Histor. Bemerkungen:

1) Kein System drückt die Basis aus: Positionsschrift fasst sie vorg. Sprache u. Individ.-Zahlz. bezeichnet jede Potenz besonders.

2) Bereich nach oben (N) in Sprache u. Zeichen sehr beschränkt. z.B. keine Zahlw. für 10^{10}

3) Bereich nach unten ($\nu < 0$) teils nur partiell aufgenommen (z.B. endliche Sexag. Br.) teils ohne jeden Zusammenhang mit dem System (z.B. „fünftel" nichts mit 0·2 zu tun).

Problem: wie hängen historisch diese völlig inkonsequente Dinge eines „Systems" miteinander zusammen?

1) Abgesehen natürlich von reinen Abkürzungen wie Π (πέντε) Δ (δέκα).

8. Die ganzen Zahlen.

„Basis" existiert garnicht immer: Voll systemlose Zahlbezeichnungen (herumzählen am Körper). ~~Also~~ liefert nur eine feste Anzahl von „Zahlsymbolen" ohne Struktur! Also Frage 1) und 2) garnicht zu trennen.

1.) Zahl als „Qualität" in den Zahlklassen. Kein „Ökonomie-prinzip" der Sprache. Grammatischer Formenreichtum (z.B. Dual, Trial, Quaternal) ersetzt abstrakte Begriffsbildung. Also zunächst konkreter Mengenbegriff ohne jede Zahlworte oder -Zeichen.

2) Phase der Abbildung auf Gebärden, Körperteile, Marken oder Bilder von Gegenständen. „Anschauungsgebundene" Zahlzeichen. Dies wesentlichste Stufe. Damit braucht keineswegs ein „System" zu entstehen; z.B. „Körperzählen" bis 17, 29, 33 u.s.w. Oder nicht Iterierung an sich selbst sondern „zweiter Mann". Elementarste Abbildung auf „Paar". Daher sehr häufig „Zweiersysteme" und „Vierersysteme".

Über das Paar hinaus 3 als „Plural" an sich. Vgl. ägypt. Pluralbezeichnung 777 → III. Oder sumerische Dialekt" "Th.-Dg. RA 25, 121 (1928)

3 weiter = 4
3 " u. 1 = 5
3 " u. 1 u. 1 = 6
3 3 u. 1 = 7

späteres Sumerisch

6 = 5 + 1
7 = 5 + 2
9 = 5 + 4

3a) Also Abbildung auf kleine Gruppen (z.B. Paar = 2; Plural = 3 Paar-Paar = 4 Hand 5) ~~[illegible]~~ und Iteration führt zu einer sprachlichen Basis- und System-Bildung.

3b) Analog „Bündelung" der Zeichen

z.B. altindisch

I II III X IX IIX IIIX XX IXX ?

also trotz Bündelung kein konsequentes 4-er-System ?, sondern dezimal durchbrochen.

4) Erst Zählen der Bündel führt zu einem System: OO OOO

Beispiel d. aegypt. Zahlzeichen.

„Zählklassen" u. „anschauungsgebunden": besondere Scheffelzahlen und Hohlmasse 6 Scheffel r3 als Hohlmass ($\frac{1}{320}$ Scheffel)

Alte Pluralform neue III

∩ ungeklärt

℮ Messleine

als reiner Plural, auch →

) (Finger) für 10.000. (ḏbꜥ) verschwindet im Kopt.

(Kaulquappe) für 100.000 ḥfn verschwindet im Demot.

ḥḥ Himmelsgott für 1.000.000 verschwindet im NR

so dass wirkliche Individualzahlz. nur 1 ∩ ℮ und $= \infty$

8. Bruchteile

Aeg. Bruchbezeichnung ← Mund

Schneidemann → Teilansicht

$\overline{5}$ $\overline{10}$

Analogie durch römische Bruchbez. uncia $= \frac{1}{12}$ (as) z. B.
de-unx $11/12$. Babylon. Bruchbez. aus also Mass.

Inkonsequenz d. aegypt. Bruchbezeichnung

					oder X	... ∩ u.s.w.
gś	r3 1	r3 2	r3 3	r3 4	ḫ3b	... $\frac{1}{10}$ ...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		

alt als Aruren-Bruchteil

Sumer. Bruchbez.

→ $\frac{1}{2}$ → → $\frac{1}{3}$ → $\frac{2}{3}$ | igi n gál

Rolle der Komplementbrüche

Begriff „natürliche Brüche" im Gegensatz zu „algorithmische"

Entspricht dem Gegensatz „Individualzahlen" — homog. Zahlen.

Individualzahlen + natürl. Brüche bilden den

„natürlichen Kern"

eines „Zahlensystems".

10. 4. 34.

Übersicht.

Individual-Bezeichnungen }
Komplement-Bezeichnung } Kern
algorithmisch
ungeklärt

	sumerisch		akkadisch	aegyptisch	griechisch		römisch
1/2	šuria		mišlum	gś	∠	ἥμισυ	semis
1/3	šušan		šuššân šalšâtu		γ′	τὸ τρίτον (μέρος)	triens
2/3	šanabi		šinipu šittâ qâtâ	ś3-wj	β′	τὰ δύο μέρη	bes =(binae partes)
1/4			ribâtum	×	δ′	τὸ τέταρτον μέρος	quarta pars quadrans
3/4			šalāstu ribâtum šalāštâ qâtâ		∠ δ′ ↓	τὰ τρία μέρη	tres partes dodrans (=de quadrans)
1/5			ḫaššatum		ε′	τὸ πέμπτον μέρος	quinta pars
4/5			erbettu ḫaššâtu		β′ι′λ′	τὰ τέσσερα μέρη	quattuor quintae partes
1/6			šeššêtum		ς′	τὸ ἕκτον μέρος	sexta pars sextans
5/6	kingusila		parasrab		∠γ′		semis et triens dextrans (=de sextans) decunx (=decem unciae)
1/12					ιβ′		uncia
11/12					∠γ′ιβ′		deunx (=de uncia)

Zusatz: Sethes Ordinalzahltheorie.

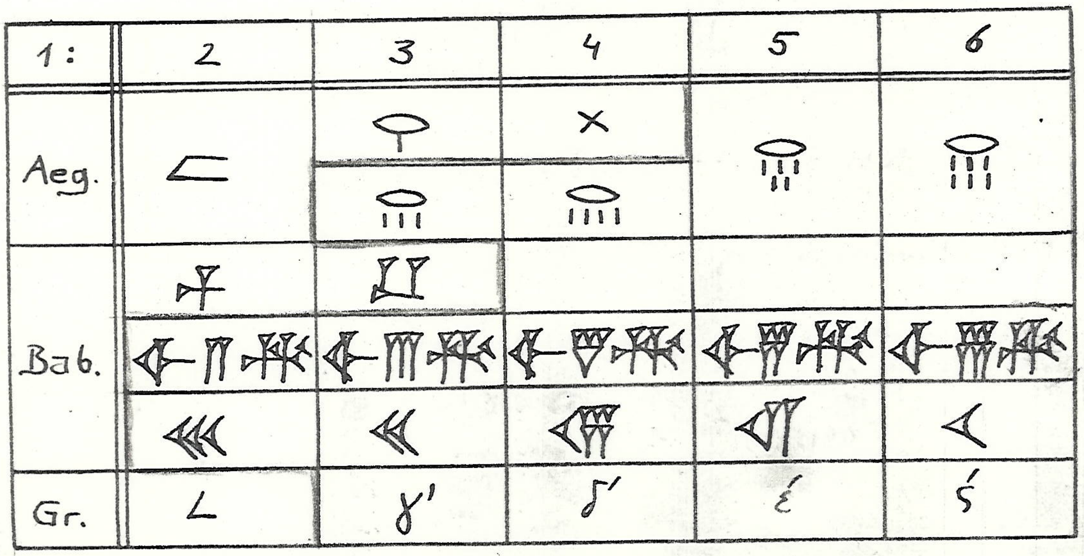
Die Stammbrüche sind Ordinalia und abhängig von der Anzahl der gedachten Teile: damit „der dritte Teil" einen absoluten Sinn hat, muss man schon wissen, dass eine Dreiteilung vorliegt. Er ist abhängig von den bereits vorhandenen „zwei Teilen" des Komplementbruches – er ist der Teil der die im Komplementbruch vorhandenen Teile zur Einheit auffüllt. Diese Ordnungszahl ist also bedingt durch die bereits existierende Anzahl von Teilen in die die Einheit zerlegt wird.

Entsprechend heisst „durch 8 teilen" im Äg. „zu einer Achtheit machen" od. „in eine Achtheit teilen". Es ist also der Anzahlbegriff das Primäre, der Bruchbegriff ist aus ihm abgeleitet als Ergänzung neuer Anzahlen, und der Ordinalzahlbegriff ist derjenige der den Abschluss dieser Teilbildung zur vollen Einheit andeutet. So ist der Anzahl- und nicht der Ordnungsbegriff das Primäre.

Volle Bestätigung dieser Theorie durch die grammatische Form der Ordinalzahlworte im Äg. wie Sanskrit als Zahlbildungen mit Zusatz „voll machend" u. dgl.

Resultat:

Dem „Kern" und der zeitlichen Variabilität der ganzen Zahlen entspricht ein „Kern" natürlicher Brüche dessen Umfang durch folgende Übersicht gegeben ist



§2. Das Sexagesimalsystem.

a. Tatsachenmaterial; Problemstellung.

1.) Jüngste Phase ($\geqq$ Darius)

Sexages. System	Dezimal.-Syst.
Vielstellige Rez. Tab.	1,48 = 1 me 8
Nullzeichen i. Innern.	(me sumer. Plur.-Bez.)

} Periode d. mathem. Texte

2.) Altbab. Phase ($\geqq$ Hammurapi)

Sexages.-System	Metrologie
Normaltabellen	1 gín
Position ohne Null	2 "
Zeichen für $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$	⋮
	5 "
	6 " = 1 eše
	12 " = 2 eše
	18 " = 3 " = 1 bur

1 bán

2 bán

⋮

5 bán

3) Archaische Texte, jüngere Phase (ca UR III)

→ 1 ge	= → 1 eše
→ 10 u	→ 1 bur
→ 60 geš	10 bur
= → geš'u 600	
⋮	
→ šar 3600	
šar'u 10 · 3600	
šar-gal 60 · 3600	

4) Archaische Texte, älteste Phase (Uruk Schicht IV (Erste Schriftschicht))

Sexagesimal		Dezimal (Djemdet Nasr)
1		1
10		10
60	600	100
3600	6000	

17. ~~1~~.34.

Problemstellung

1.) Basis 60 (mit dezimalem Einschlag) (Individ.-Zahlen —)
2.) Position (mit ihrer charakter. Unbestimmtheit)
3.) Mehrdeutigkeit d. metrolog. Zahlzeichen

b.) Analyse der Zahlzeichen

1) Dezimalsystem. □ und ○ ~~Abb~~ Marken wie aeg. I und ∩. Dies offenbar das absolute „Zahlensystem" als solches.

100 in Djemdet-Nasr ○ wohl „Kreis" (šar) = ∞ (s. u. bei 3600) oder „grosse 10" d. h. 10.10.

100 sonst . Wegen dem Vorkommen in:

< 1 bur („10")
10 bur („100")

vielleicht metrologisch (vgl. Aeg. @ 100).

2.) Sexagesimalsystem.

Nur in der Stufe 60 von D „1" zu D „grosse 1" ausgedrückt also garkeine selbständige Individualbezeichnung

○ 3600 ist „Kreis" (s.) = šar = ∞ 60.60.

3.) Brüche.

Individualbez. alt für ½ ⅓ ⅔

5/6 kingu-sila   sila = za ?
fehlt Zeichen für 1/6
fehlt alte Schriftform. Also sekundär?

2/3 erhalten bis in die Rechentechnik hinein: Rez-Tabellen!

Also Struktur des Zahlensystems noch sehr eng.

$$\boxed{\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1 \ldots 10} \begin{cases} \rightarrow \cancel{100}\ \{\infty ?\}\ (10.10) \\ \rightarrow 60\,(\text{„}1\text{"}) \rightarrow \infty\ (60.60) \end{cases}$$

„Kern"

Längen

še	1/180		
Finger	1/30		
Spanne	1/2		
Elle	1		
GAR	12	1	Zahlz. Mein
uš = giš		60	uš = Länge, giš = 60 vgl. äg. @
Meile		30,0	

Naturmasse	Bab.	Aeg.
Finger	1/30	1/28
Hand		1/7
Spanne	1/2	
Elle	1	1

GAR	1
10 GAR	10
uš = giš	60

Meile	1

Flächenmasse

še	1/180		
Šekel	1/60		
SAR	1		$(1\ GAR)^2$
iku	100	1	$(10\ GAR)^2$
eše	600	6	
bur		18	
bur-u		180	

še	1/180		
Šekel	1/60		
SAR	1		
iku	100	1	
eše	600	6	
		18	bur
		180	bur-u

ŏη	1/60		
SAR	1		
60 SAR	60	1	
eše	600	10	1

		1/60	Šekel
		1	ΣAP
	1	60	60 ΣAP = 1β
1	10	600	bur
10	100		bur-u

Gewichte

še	1/180	
Šekel	1	1/60
Mine		1
Talent		60

Šekel	1/60
Mine	1
Talent	60

Ergebnis: auch Massgruppen ursprünglich von der Struktur

$\boxed{1 \quad 10}\ 60$

mit höchstens $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$ als Bruchteilen, d.h. ursprünglich dieselbe Struktur wie Zahlensystem.

d. Zusammenfassung.

Problem 3 (Mehrdeutigkeit) erledigt durch Verkittung der Massgruppen unter Beibehaltung der Zeichen. Ergebnis: Analogie Zahlen – Masse.

Problem 2 (Position) existiert zunächst garnicht, da ja 60 Individualzeichen „grosse 1" d.h. für sich einfach „1"![1] Daher auch „30" zunächst immer als bestimmte kleine Einheiten (und daher ½ der grossen) zu verstehen und selbstverständlich mit den sexagesimalen Individualzahlz. gezählt. Konkrete Massbezeichnung macht Massangabe überflüssig. Die Kopplung mit d. Metrologie schafft so allmählich den „Positionschar." der aber auch die „Überbestimmtheit", da ja ursprünglich nichts unbestimmt ist und die Unbestimmtheit nur eine Folge der geschichtlichen Verkürzung und der Übertragung von Teileinheiten (z.B. gin) auf fremde Massgruppen. der nichts anderes ist als Konsequenz der Tatsache, dass die Einzelkerne erst den geringen Umfang 1...10 haben und bereits $10.10 = \infty$. Der Übergang zum Rechnen geschieht auf dem Gebiet d. Metrologie – und dort sind die isolierten Kerne jeweils vom Umfang $\boxed{1,10}$.

Problem 1 (Basis 60). „Basis 60" im Sex.-Sys. verknüpft nur mit Positionschar – sonst ja (auch später) dezimal. Positionschar. erkannt als metrolog. Angelegenheit, d.h. als Verkittung zweier Kerne. „Unsystematische" Verkittung führt zu Mehrdeutigkeit d. Zahlzeichen. „Systematische" Verkittung muss ganzzahlige Ausdrückbarkeit der Bruchteile der grösseren Einheit durch die kleinere leisten. Also führt ~~die~~ systematische Verkittung von zwei isolierten (d.h. weit genug entfernten) Gruppen[2]

$\boxed{\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ 1\ 10} \qquad \boxed{\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ 1\ 10}$

auf die Forderung der Teilbarkeit durch 2, 3 und 10 d.h. 60. Am reinsten ausgeprägt im Gewichtssystem Talent – Mine – Šekel d.h. im Geldsystem.

Von da Übertragung auf andere Massgruppen (vgl. Šekel $\hat{=}$ 1/60 schlechthin wie römisch as-Teilung!) und Abschleifung zur sexag. Position.

1) Analog bei ägypt. Scheffeln, wo | = 10 Scheffel heisst!

2) Was passiert, wenn die Gruppen zu nahe stehen, zeigt z.B. das Beispiel der Flächenmasse. Dieser Prozess d. sexages. Verkittung braucht nur an einer einzigen Stelle zwischen zwei Masskernen passiert zu sein.

Schlussbemerkungen: Als gesichert i. d. vorangeh. Theorie ist anzusehen: 1.) d. mathem. Vorteil d. Pos.-Syst. ist erst allmählich bemerkt (s. Rez.-Tab. u. Mult.-Tab.) d. h. das Sex.-System ist als strenges System für alle Rationalzahlen erst sekundär. 2.) Zahlbezeichnung nach positionellem Prinzip einerseits, Fehlen einer „Null“ andererseits führt beides auf eine ursprünglich metrologische Bedeutung dieser Zahlzeichen. 3.) Die sexages. Stufe ist jünger als die dezimale mit ihrer Individ.-Z.-Bez. 4.) Der Übergang von dezimaler Struktur zur sexagesimalen erfolgt in einer so frühen Phase, dass die nächste dezimale Cäsur nach dem „natürl. Kern“ 1, …, 10 nämlich ~~…~~ 10.10 bereits den Charakter von „∞“ hat, also noch nicht ~~…~~ ein „System“ ausgebildet ist.

e. Anhang: Analoge Erscheinung der Kern-Verkittung im äg. ḥkꜣ-t – rꜣ-System. Vgl. Arbeit in ÄZ 65.

Kap. IV. Aegyptische Mathematik.

§ 1. Der Typus der Aegyptischen Mathematik.

24. 4. 34.

a. Allgemeines.

Quellen: M(oskau) Text des MR (etwas über 25 Beispiele)
R(hind) Abschrift e. Textes d. MR. (etwas über 80 Beispiele + Bruchrechnungstabelle)
Fragmente auch im Wes. MR. (Beispielfragmente + Bruchrechnung)

Äusseres d. Papyri (Photo M). M $5\frac{1}{2}$ m × 8 cm R $5\frac{1}{2}$ m × 32 cm

Über Absicht u. Klassifiz. dieser Texte s. u. ~~…~~ c.

b. Mathematischer Typus.

1.) Allgemeines

Bezeichnung: $\bar{n} = \frac{1}{n}$ $\bar{\bar{3}} = \frac{2}{3}$

Übersicht über die ʿḥʿ-Rechnungen (QZ5, B1 S. 307)

Lösungsverfahren von B1. Ziel nicht die „Bestimmung von x" sondern die Angabe d. einzelnen Summanden. Gegensatz die Schlussbemerkg. von AO 17264 „und analog bei den übrigen Höhen". z.B. R39: 100 Brote auf 10 Leute in gewisser Relation zu verteilen. Ergebnis

12 ½	8 ⅓
12 ½	8 ⅓
12 ½	8 ⅓
12 ½	8 ⅓
	8 ⅓
	8 ⅓

also völlig konkreten Charakter.

Schwierigkeit nicht „Lösung einer linearen Gleichg." sondern Umsetzung konkreter Aufgaben in ein numerisches Verfahren, die „Algorithmisierung". Beispiel R 37

$$3x + \bar{3}x + \bar{3}\cdot\bar{3}x + \bar{9}x = 1$$ „Ich gehe hinein 3-mal in den Scheffel; 1/3 von mir dazu und ...."

wird „algorithmisiert" durch

	1	1
	2	2
	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ von sein	$\bar{3}$	$\bar{9}$
sein	$\bar{9}$	$\bar{9}$
zusammen		$3 + \bar{2} + \overline{18}$

(wobei $\bar{3} + \frac{2}{9}$ umgerechnet in $\bar{3} + (\bar{6} + \overline{18}) = \bar{2} + \overline{18}$).

2.) Rechentechnik

(12.12)

1	12
2	24
/ 4	48
/ 8	96
zus.	144

(14.80)

1	80
/ 10	800
2	160
/ 4	320
zus.	1120

(16^2)

/ 1	16
/ 10	160
/ 5	80
zus.	256

(19:8)

1	8
/ 2	16
$\bar{2}$	4
/ $\bar{4}$	2
/ $\bar{8}$	1

d.h. $19:8 = 2 + \bar{4} + \bar{8}$

(16:3)

/ 1	3
2	6
/ 4	12
$\bar{\bar{3}}$	2
/ $\bar{3}$	1

d.h. $16:3 = 5 + \bar{3}$

$(2 : 1 + \bar{3} + \bar{4})$

/ 1	$1 + \bar{3} + \bar{4}$
$\bar{\bar{3}}$	$1 + \overline{18}$
$\bar{3}$	$\bar{2} + \overline{36}$
/ $\bar{6}$	$\bar{4} + \overline{72}$
/ $\overline{12}$	$\bar{8} + \overline{144}$

d.h. $2 : 1 + \bar{3} + \bar{4} = 1 + \bar{6} + \overline{12}$ + Rest

(4:15)

1	15
$\overline{10}$	$1 + \bar{2}$
/ $\bar{5}$	3
/ $\overline{15}$	1

d.h. $4:15 = \bar{5} + \overline{15}$

Also:
1.) Additive dyadische Methode d. Mult. (Add. bei Individ.-Z. trivial!)
2.) Ausnützung der Dezimalstruktur (10 und 5)
3.) Division $\frac{a}{b} = x$ als $xb = a$ (s. Babyl. Divis. d. irreg. Zahlen!)
4.) Teilung entweder „½-Reihe" $\bar{2} \to \bar{4} \to \bar{8} \to \dots$ oder „⅔-Reihe" $\bar{\bar{3}} \to \bar{3} \to \bar{6} \to \dots$
5.) Teilung mit Ausnützung spezieller Hilfen z.B. dezimal.
6.) Mit Hilfe der Subtraktiven Ergänzung.

3) Problemstellung:

Individualgültigk. → Additivität → Dyadik (→ Stammbruchpostulat) sind innerlich eng zusammengehörige Ausdrucksformen einer relativ frühen Entwicklungsphase.

Komplikation der Bruchrechnung dazu als Gegensatz. Darin als Teilproblem die „Kanon. Zerlegungen" der „2/n – Tab." z.B.

$$2/9 = \overline{6} + \overline{18}$$
$$2/11 = \overline{6} + \overline{66}$$
$$2/13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$$
$$\vdots$$
$$2/89 = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$$
$$2/91 = \overline{70} + \overline{130}$$
$$\vdots$$

wobei aber wieder die Beschränkung auf 2/n in die Dyadik passt.

Aufgabe: die Bruchrechnung sowohl ideenmässig wie in rechentechn. Einzelheiten einzugliedern in den übrigen Rahmen. Vgl. § 3. Für die Rolle der Bruchrechnung an sich vgl. die bab. Mult.- u. Rez. Tabellen

c. Geschichtliche Einordnung d. aeg. math. Texte

Die pśw – Rechnungen (Übersicht QS B1, 319)

Absicht und Typus d. Papyri; Wirtschaftspapyri; Schreiber- und Schreiber-Beruf. (Erman Lit. 281ff.)

Moderne mathem. Klassifiz. d. aegypt. Math. mit „Arithm." und „Geometrie" grundsätzlich falsch. Vgl. die Aeg. Volumberechnung + Getreide-Umrechnung.

Geometrie als math. Begriff erst griechisch.

§ 2. Aegyptische Geometrie

$\boxed{1.5.34.}$

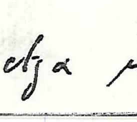
a. Ebene Aufgaben.

Dreiecksfläche; Rechtecksfl.; Trapez; Bairis-Problem: „viereckig machen" R51 u. R52

Edfu – Approximationen — Dreieck als eine Seite „mitts"

Kreisfläche $\left(\frac{8}{9} d\right)^2 = \kappa d^2$ $\quad \kappa \approx \frac{\pi}{4}$ $\quad \pi \approx 3{,}1605 \ldots$ Die Kreisfläche das Primäre, denn $F = \underline{\underline{\kappa}} d^2$ aber $U = 4\underline{\kappa} d$

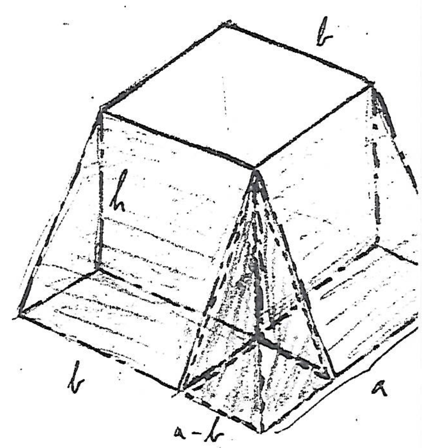
Böschungsbegriff sḳd

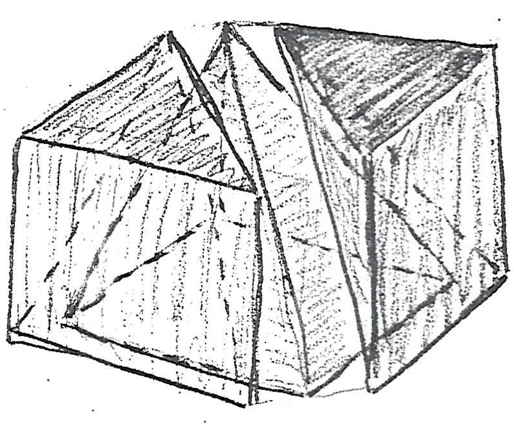


sḳd $= \mu \operatorname{ctg} \alpha \quad \mu = 7$

1 Elle = μ Handbreiten

vgl. bab. šá-gal $= \mu \operatorname{ctg} \alpha \quad \mu = 12 \quad$ 1 GAR = 12 Ellen



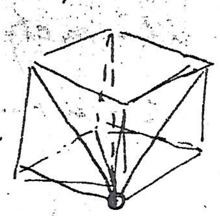


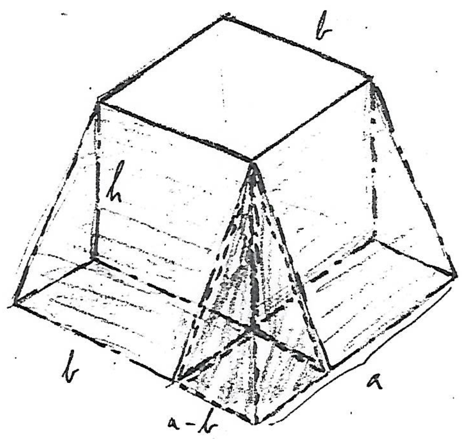
$$\square + \boxed{\vdots} = h \cdot ab$$

$$\triangle = \frac{h}{3}(a-b)^2 = h\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}ab + \right.$$

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Figur von M14 unsymmetrisch!
Einzige Vor. Pyr.-Vol $= \frac{h}{3}a^2$.
leicht einsichtbar und sogar im
Falle des Würfels exakt anschaulich



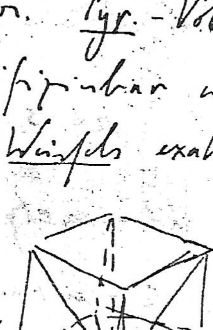


$$\square + ▯ = h \cdot ab$$

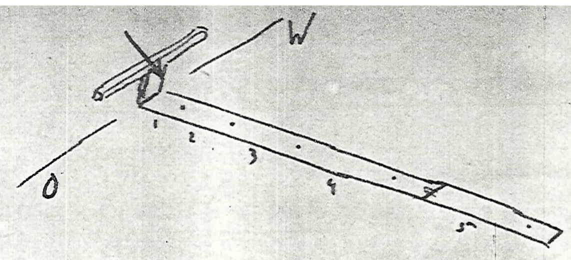
$$\triangle = \frac{h}{3}(a-b)^2 = h\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}ab + \frac{b^2}{3}\right)$$

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Figur von M14 unsymmetrisch!
Einzige Vor. Pyr.-Vol. $= \frac{h}{3}a^2$. Dies durch Gewicht leicht nachprüfbar und sogar durch Zerlegung im Falle des Würfels exakt erhältlich



Sonnenuhren



b. Volumina

Würfel d. Kante a in spez. Mass

R 44: $a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{20} = V$ (a gg. z. $a = 10$

R 45: (V geg.) $a = 20 \sqrt{\frac{1}{100} \cdot \frac{2}{3}} = 20 \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{2}{3}}$ soetwas vermutlich entstanden durch spätere Hinzufügung des Abschreibers. (NB Textstruktur von R).

Zylindervol.

Kegelstumpfvol. (+ 3. Koh.)

$$V = \frac{h}{12}\left(\frac{3}{2}(D+d)\right)^2 = \frac{h}{4\pi} U_m^2 \qquad \pi \approx 3$$

Analog im Bab.

$$F_0 = \frac{U^2}{12}$$

~~[illegible]~~

Pyramidenstumpfvol. M 14

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Niveafrage: Astron.-Mediz. Entstehungsmögl. d. Formel M 14 aus Bautechnischem.

c. M10

Text	Struve	$\mathcal{N}_1$	Peet	$\mathcal{N}_2$
Beispiel z. Ber. einer nb.t 𓎟 1 Wenn man Dir sagt: eine nb.t m tp-r3 (Mündung) r $4\frac{1}{2}$ m ${}^{c}\underline{d}$ lass mich wissen ihre Fläche Nimm $\frac{1}{9}$ von 9 ~~[illegible]~~ weil die nb.t die Hälfte des i[illegible] das macht 1	Korb = Halbkugel von Mündung zu $4\frac{1}{2}$ in Erhaltung $t = 4\frac{1}{2} = d$ i[nr] (=Stein) = Kugel	Korb = Halbkreis $t = 4\frac{1}{2} = r$ i [illegible]	Korb = Halbzyl. [von $4\frac{1}{2}$] an Mündung (d) zu $4\frac{1}{2}$ an ${}^{c}\underline{d}$ (a) 1) i[p.t] 2)	Korb = Speicher
$9 - 1 = 8$ $\frac{1}{9}\, 8 = \bar{\bar{3}} + \bar{6} + \overline{18}$ $8 - (\bar{\bar{3}} + \bar{6} + \overline{18}) = 7 + \bar{9}$ $(7 + \bar{9})(4 + \bar{2}) = 32$ = Fläche	$2t - \frac{1}{9} 2t = 8$ $(2t - \frac{1}{9}2t) - \frac{1}{9}(2t - \frac{1}{9}2t) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 2t$ $F = t\{(\quad) - (\quad)\}$ $= t\left(\frac{8}{9}\right)^2 2t \approx t\frac{\pi}{4}2t = \frac{1}{2}t^2\pi$ $= \frac{1}{2}d^2\pi$	$= \frac{1}{2}r^2\pi$	$2d - \frac{1}{9}2d = 8$ $(2d - \frac{1}{9}2d) - \frac{1}{9}(2d - \frac{1}{9}2d) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 2d$ $F = a\{(\quad) - (\quad)\}$ $= a\left(\frac{8}{9}\right)^2 2d \approx a\frac{d\pi}{2}$	

1) Wäre nicht $2d$ genommen, sondern $4d$, so wäre $4da$ d.h. der Kreisumfang beachtet worden.
2) Nach WB soll ip.t mit hebr. Epha zu tun haben. 1 Epha nach Hultsch $39\frac{1}{9}$ ist ca $36\frac{1}{2}$ L

§ 3. Aegyptische Bruchrechnung.

8.5.34.

a. Hilfszahlenalgorithmus.

Konstatierung dass (R 30)

$$\bar{\bar{3}} + \overline{46} + \overline{138} + \overline{5} + \overline{10} + \overline{230} = 1$$

scheint gelöst durch „Hilfszahlen" (HZ) wie in R 22

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{\bar{3}} & + & \overline{5} & + & \overline{10} & + & \overline{30} & = & 1 \\ 20 & & 6 & & 3 & & 1 & & \end{array}$$

d.h. durch „kl. gem. N." Sofort widerlegbar durch

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (36 & + & \bar{\bar{3}} & + & \overline{4} & + & \overline{28} &) & + & (\overline{28} & + & \overline{84} &) & = 37 \\ & & 3621+\bar{\bar{3}} & & 1358 & & 194 & & & 194 & & 64+\bar{\bar{3}} & & \end{array}$$

mit „gem. N." 5432 statt 84 (und ausserdem gebrochen!) sowie R 14

1	$\overline{28}$	1
$\overline{2}$	$\overline{56}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{112}$	$\overline{4}$
zus.	$\overline{16}$	

Lösung durch „Übertragungsprinzip" (QS B 1 Teil III S. 331)

Grundfigur also doch $\begin{array}{cc} 1 & n \\ \overline{n} & 1 \end{array}$ wo $\overline{n}$ kleinster vork. Bruch.

„Kontrollprinzip" der HZ, nicht „gem. Bruch" Beispiel

R 33: $x + \bar{\bar{3}}x + \overline{2}x + \overline{7}x = 37$

Rechnung:

$$\begin{array}{rl} 1 & 1 + \bar{\bar{3}} + \overline{2} + \overline{7} \\ 2 & 4 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28} \quad (\text{NB: } \tfrac{2}{7} = \overline{4} + \overline{28}) \\ & \qquad (\text{NB: } \bar{\bar{3}} + \overline{2} = \overline{2} + \overline{6} + \overline{2} = 1 + \overline{6}) \\ 4 & 9 + \overline{6} + \overline{14} \\ 8 & 18 + \overline{3} + \overline{7} \\ / \; 16 & 36 + \bar{\bar{3}} + \overline{4} + \overline{28} \quad (\text{NB: } \tfrac{2}{7} = \overline{4} + \overline{28}) \\ & \quad 28 + 10+\overline{2} + 1+\overline{2} = 40 \end{array}$$

HZ-Ergänzung d. ersten Zeile liefert

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 42 \end{array}} \begin{array}{l} + \bar{\bar{3}} + \overline{2} + \overline{7} \\ + 28 + 21 + 6 = 97 \end{array} \end{array}$$ (d.h. 97 42-tel (nach Schema $\begin{array}{cc} 1 & 42 \\ \overline{42} & 1 \end{array}$))

Also wegen $37 - 36 = 1$ „Rest 2" (sc. 42-tel).
Also hat man sich mit „16" bereits bis auf 2 42-tel der 37 genähert, d.h. man ~~braucht~~ muss noch aus den 97 42-teln d. ersten Zeile „2" erzeugen. Also Text:

$$\begin{array}{lcc} \overline{97} & 42 & 1 \\ / \; \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} & \overline{21} & 2 \end{array} \quad (\text{NB: } \tfrac{2}{97} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776})$$

d.h.

$$x = 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.$$

Würde man mit „gem. Br." rechnen, so wäre aus

$$x + \bar{\bar{3}}x + \overline{2}x + \overline{7}x = 37$$

abzuleiten

$$\frac{97}{42} x = 37$$

d.h. $x = (37 \cdot 42) : 97$ was einer völlig anderen Rechnung entsprechen ~~würde~~.

Also HZ nur Ergänzung d. Dyadik, nicht nur formale Ausdrucksweise f. gem. Brüche.

Nur solche Brüche erhalten HZ die nicht „übersehbar" sind (QS B 1 S. 339 Tab. V). „Übersehbar" sind die Reihen mit

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} \quad \frac{\overline{4}}{\overline{3}} \quad \frac{\overline{8}}{\overline{6}}$$

d. h. mit d. „natürl. Br."

So vollkommene methodische Einheitlichkeit d. aeg. Br.R.

b. Problemstellung.

Tatsachenmaterial:

1.) ganze Zahlen → Dyadik; Stammbruchpostulat } → $\frac{2}{n}$ Tabelle

2.) natürl. Br. : algorithm. Br. → übersehbar : HZ-Alg. d. h. wieder Reduktion auf ganz. Dyadik

3.) Dyadik und Stammbruch: Komplementbruch → $\frac{1}{2}$- und $\frac{2}{3}$-Reihe in d. Division

Als Problem die Struktur der $2/n$-Tabelle:

I) Verbot von $\overline{n}+\overline{n}$ ~~[illegible]~~
dann aber ∞-vieldeutig. Also

II) woher trotzdem kanonische Auswahl d. h.

III) wie diese speziell entstanden.

c. Struktur der $\frac{2}{n}$-Tabelle.

Frage I sofort erledigt durch ihre Negation. Wie $\frac{5}{11}$ sonst zu brechen:

ohne I:		mit I	
\ 1	$\overline{11}$	\ 1	$\overline{11}$
2	$\overline{11}\ \overline{11}$	2	$\overline{6}+\overline{66}$
\ 4	$\overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}$	\ 4	$\overline{3}+\overline{33}$
zus.	$\overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}$	zus.	$\overline{3}+\overline{11}+\overline{33}$

Frage II.

Text L $\quad \overline{6}+\overline{6}=\overline{3} \quad \overline{6}+\overline{6}+\overline{6}=\overline{2} \quad \overline{3}+\overline{3}=\overline{\overline{3}}$

daraus $\quad \overline{3}+\overline{6}=\overline{2} \quad \overline{2}+\overline{6}=\overline{\overline{3}}$

d. h. die Grundrelationen zwischen $\frac{1}{2}$- und $\frac{2}{3}$-Reihe.

Liste von L:

$\bar 3 + \bar 6 = \bar 2$	$\bar 2 + \bar 3 + \bar 6 = 1$
$\bar 6 + \overline{12} = \bar 4$	
$\bar 9 + \overline{18} = \bar 6$	$\bar 6 + \bar 9 + \overline{18} = \bar 3$
$\overline{12} + \overline{24} = \bar 8$	
$\overline{15} + \overline{30} = \overline{10}$	$\overline{10} + \overline{15} + \overline{30} = \bar 5$
$\overline{18} + \overline{36} = \overline{12}$	
$\overline{21} + \overline{42} = \overline{14}$	$\overline{14} + \overline{21} + \overline{42} = \bar 7$
$\overline{24} + \overline{48} = \overline{16}$	
$\overline{27} + \overline{54} = \overline{18}$	$\overline{18} + \overline{27} + \overline{54} = \bar 9$
$\overline{30} + \overline{60} = \overline{20}$	
$\overline{33} + \overline{66} = \overline{22}$	$\overline{22} + \overline{33} + \overline{66} = \overline{11}$

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} \qquad \frac{3}{2n}}_{\frac{2}{n} = \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{n} \qquad n \text{ durch 3 teilbar}$$

dies genau die Serie der $\frac{2}{n}$ Zerlegungen für $n \equiv 0\,(3)$ (jede zweite Zeile!)

Allgemeines Prinzip: Aus einer beliebigen Stammbruchrelation

$$\bar a = \bar n + \alpha \bar n \qquad \alpha < 1$$

kann man durch den komplementären Bruchteil

$$\beta = 1 - \alpha$$

zu α eine $2/n$ – Zerlegung gewinnen, nämlich

$$\frac{2}{n} = \bar a + \beta \bar n .$$

Dabei allerdings im Rahmen d. äg. Rechentechnik Zusatzbedingungen:

I.) α und $1 - \alpha = \beta$ müssen Stammbrüche sein

II.) $\bar a = \bar n + \alpha \bar n$ muss „abrechbar" sein, d.h. in $\bar n + \alpha \bar n$ dürfen nur „natürliche" Bruchteile von $\bar n$ auftreten.

Anwendungen:

$$\alpha = \bar 2 \qquad \beta = \bar 2 \qquad \bar a = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{also } n \equiv 0\,(3)$$

$$\alpha = \bar{\bar 3} \qquad \beta = \bar 3 \qquad \bar a = \frac{1}{n} + \frac{2}{3n} = \frac{5}{3n} \quad \text{also } n \equiv 0\,(5)$$

$$\alpha = \bar 2 + \bar 4 \qquad \beta = \bar 4 \qquad \bar a = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{7}{4n} \quad \text{also } n \equiv 0\,(7)$$

Nach Erschöpfung der „abrechbaren" Kombinationen muss HZ-Algorithmus eingreifen.

Ausgangspunkt:

$$\overline{n} + \alpha\overline{n} = \overline{a}$$

soll ein Stammbruch $\overline{a}$ werden, wobei nun der Bruchteil α eine grössere (unübersichtbare!) Stammbruchsumme sein muss.

Modern ausgedrückt:

$$\overline{n} + \alpha\overline{n} = \frac{1}{n}(1+\alpha) = \frac{1}{n}\cdot\frac{r}{s}$$

wird sicher ein Stammbruch $\overline{a}$, wenn $r = n$. Ist also

$$1 + \alpha = 1 + \overline{a}_1 + \dots + \overline{a}_k$$

so versucht man solche $\overline{a}_i$ und ein solches $\overline{a}$ zu bestimmen, dass

$$1 + \overline{a}_1 + \dots + \overline{a}_k = n\cdot\overline{a}$$

d.h. aber im HZ-Algor.: Man hat „a-tel" zu zählen, also

$$\begin{array}{cc} 1 & a \\ \overline{a} & 1 \end{array}$$

einzuführen, dann die zugehörige Relation

$$\begin{array}{cccc} 1 & +\ \overline{a}_1 & + \dots + & \overline{a}_k \\ a & b_1 & & b_k \end{array}$$

aufzustellen, so dass

$$a + b_1 + \dots + b_k = n$$

wird.[1] Also umg.: Man suche eine additive Zerlegung von n und bestimme die zugehörigen a, b_i.

Beispiel $n = 61$. Selbstverständlich ungleiche Zerlegung:

$$\begin{array}{l} 61 = \boxed{40} + 20 + 1 \\ \ \boxed{1} + \overline{2} + \overline{40} = 1 + \alpha \end{array}$$

also dazu

d.h. es ist

$$\overline{61} + \cancel{}(\overline{2} + \overline{40})\overline{61} = \overline{40} = \overline{a} = (1+\alpha)\overline{n}$$

ein Stammbruch.

Nun Ergänzung von $\overline{a} = (1+\alpha)\overline{n}$ zu $\frac{2}{n}$ zu suchen d.h.

Ergänzung von $\begin{array}{cc} 1 & 40 \\ 1+\alpha & 61 \end{array}$ zu $\begin{array}{cc} & \\ 2 & 80 \end{array}$ d.h. aber 19.

Also

$$\begin{array}{rr} \boxed{1} & \boxed{40} \\ \overline{2} & 20 \\ /\ \overline{4} & 10 \\ /\ \overline{8} & 5 \\ /\ \overline{10} & 4 \end{array}$$

d.h. $\beta = \overline{4} + \overline{8} + \overline{10}$ also

$$\frac{2}{n} = \overline{a} + \beta\overline{n} = \overline{40} + (\overline{4} + \overline{8} + \overline{10})\overline{61} = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}.$$

1) Genau dies ist ja schon bei den übersichtbaren Zerlegungen der Fall gewesen, z.B.

$$\begin{array}{l} 1 + \overline{2} \\ 2 + 1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + \overline{3} \\ 3 + 2 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + \overline{2} + \overline{4} \\ 4 + 2 + 1 = 7 \end{array}$$

11. 5. 34.

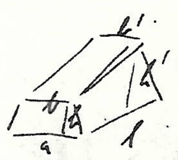
Kapitel V.

Babylonische Mathematik.

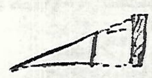
§ 1. Geometrie.

a) Felderpläne; Mittelwerte (Bild)

b) Elementare Volumina.

Mittelwert: 

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2}\right)\frac{h+h'}{2}\cdot l$$

Leistungsber. bei Angriffswällen 
Kanälen
Bauwerksfundamenten

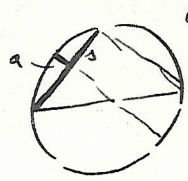
Wasseruhr (Astron.!)

c) Sätze d. ebenen Geometrie

Ausnutzung von Ähnlichkeits-Relationen im Dr. u. Trapez.

$\mathrm{ctg}^{*}\alpha$

Quadrat- und Rechtecks-Diagon. → Pythagor. Lehrsatz

Kreissehne 

$$s = \sqrt{d^2 - (d-2a)^2}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - s^2}\right)$$

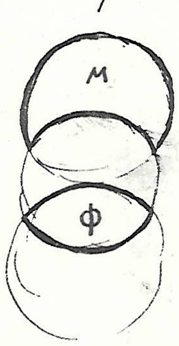
Kreisfläche

$$U = d\pi \qquad F = \frac{U^2}{12} \approx \frac{U^2}{4\pi} \qquad \pi \approx 3$$

Problem der π-Approximation s.u.

Symmetrische Gebietseinteilungen (Bild).

Möndchenproblem:



Gesamtfläche F Kreisfl. F_K 6-Eck-Fl. F_6

$$\phi = \frac{2}{6}F_6 + \frac{4}{6}(F_K - F_6) = \frac{2}{3}F_K - \frac{1}{3}F_6$$

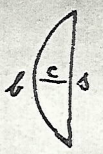
$$F = 3F_K - 2\phi = \frac{5}{3}F_K + \frac{2}{3}F_6 = F_K + 2M$$

also

$$M = \frac{1}{3}(F_K + F_6)$$

Problem des Kreissegments

$$F = s(b-s) - \frac{1}{2}(?)\begin{cases} c^2 \\ (b-s)^2 \end{cases}$$



Problem der π-Approximation; schon bei der Möndchen-Quadr. muss $\pi > 3$ sein, denn sonst ist F_G nicht von F_K unterschieden.

d.) Nichttriviale Volumina

Kegelstumpf-Vol.

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1^2}{4\pi} + \frac{u_2^2}{4\pi}\right)h = \frac{F_1 + F_2}{2}h$$

Entsprechende Pyr.-St. Formel sowie

$$V = h\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

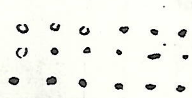
mit Unsicherheit im 2. Glied.
(sonst $\frac{a-b}{4}$)

§ 2. Arithmetisches

Formel für $n = 10$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \cancel{\frac{2n+1}{3}} \ \frac{1}{3}(1+2n)\sum_{i=1}^{n} i$$

zu gewinnen durch Gitterpunktabzählung in Horizontalreihen:



$$\sum_1^n i^2 = n\sum_1^n i - \left(\sum_1^{n-1} i + \sum_1^{n-2} i + \dots + 1\right)$$

$$= n\sum_1^n i - \sum_1^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}$$

$$= n\sum_1^n i - \frac{1}{2}\sum_1^n i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^n i + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

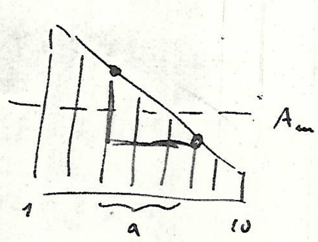
$$= n\sum i - \frac{1}{2}\sum i^2 - \frac{1}{2}\sum i + \sum i$$

$$= \frac{2n+1}{2}\sum i - \frac{1}{2}\sum i^2 \quad \text{w. z. b. w.}$$

Entsprechend spez. Beispiele für arithm. u. geom. Reihen.

Verteilung i. arithm. Progression. Textwortlaut

Gegeben: $n = 10$
$\sum A_i = 1{,}50$ Mu
$A_8 = 0{,}6$ "



Rechg $\delta = \frac{2A_m - 2A_8}{a}$ $\quad A_m = \frac{\sum A_i}{10}$ $\quad a =$ Intervallzahl

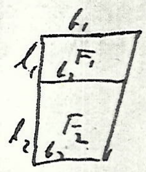
$\boxed{15.5.34.}$

§3. Algebra.

a. Lineare Gleichungssysteme

1. Strassberg 367

Angaben (Text u. Bild)



$F_1 = 13,3$

$F_2 = 22,57$

$l_1 : l_2 = \alpha : \beta = 1 : 3$

$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = 36 = c$

gesucht $b_1\ b_2\ b_3\ l_1\ l_2$

also 5 Unbek. aus 4 gegeb. Gleichungen und einer Relation

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2}$$

~~Weiter~~ Also nach Angabe

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} b_1 - b_2 &= \alpha\Delta \\ b_2 - b_3 &= \beta\Delta \end{aligned}$$

also ~~Angaben~~

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = (\alpha + \beta)\Delta = c = 36$$

Demgemäss der Text

$$\frac{c}{\alpha+\beta} = \Delta = 9 \qquad b_1 - b_2 = \alpha\Delta = 9 \qquad b_2 - b_3 = \beta\Delta = 27$$

Text weiter

$$\left(\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2\right) \cdot \frac{2}{\alpha+\beta} = 2,42 .$$

~~Sind~~:

$$l_1 = \alpha\Lambda \qquad l_2 = \beta\Lambda$$

also

$$\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1}{\alpha}(b_1 + b_2) - \frac{l_2}{\beta}(b_2 + b_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Lambda(b_1 - b_3)$$

ferner

$$b_1 - b_3 = (\alpha + \beta)\Delta$$

also

$$\left(\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2\right)\frac{2}{\alpha+\beta} = \Lambda\Delta = 2,42$$

Da Δ bekannt, so auch $\Lambda = 18$ und

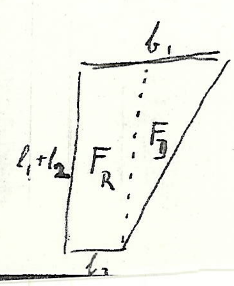
$$l_1 = \alpha\Lambda = 18 \qquad l_2 = \beta\Lambda = 54 .$$

Nun restlichen Grössen: zunächst b_3:

$$\frac{1}{2}(b_1 - b_3)(l_1 + l_2) = F_D = \frac{1}{2}\cdot 36 \cdot 1,12 = 21,36$$

$$F_R = (F_1 + F_2) - F_D = 36,0 - 21,36 = 14,24$$

$$b_3 = \frac{F_R}{l_1 + l_2} = 14,24 \cdot \overline{1,12} = 12 .$$



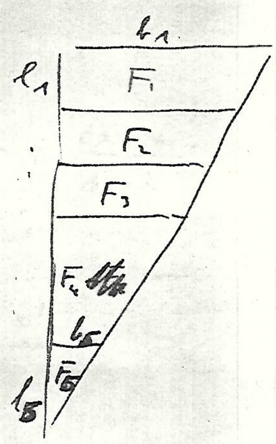
Schließlich

$$b_1 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + b_3 = 36 + 12 = 48$$

und

$$b_2 = b_3 + (b_2 - b_3) = b_1 + \cancel{b}\Delta = \cancel{12+27} = \cancel{24}\ 39$$

2. Strassbg. 364 Nr. 3



Gegeben:

$F_1 = 18,20$

$F_2 = 15,0$

$F_4 + F_5 = 13,20$

$b_1 - b_2 = 13;20$

$b_2 - b_3 = 13;20$

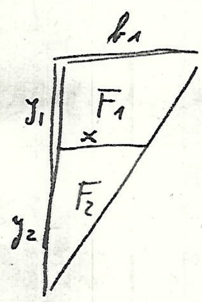
$\frac{1}{2}(b_4 - b_5) = 13;20$

dazu die Relationen

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2} = \frac{b_3 - b_4}{l_3} = \frac{b_4 - b_5}{l_4} = \frac{b_5}{l_5}$$

gesucht 10 Unbekannte $b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5$

b. Quadratische Gleichungen.



1. VAT 8512 (Fig. ergänzt)

Gegeben b_1

$\Delta = F_1 - F_2$

$\delta = y_2 - y_1$

gesucht $x, y_1, y_2; F_1, F_2$

Text:

(1) $$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\Delta}{\delta} + b_1\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\right)} - \frac{\Delta}{\delta}$$

(2) $$y_1 = (b_1 - x)\,\frac{\Delta}{\frac{1}{2}\,b_1^{\,2} - x^2}$$

(3) $$F_1 = \frac{b_1 + x}{2}\,y_1$$

(4) $$y_2 = y_1 + \delta$$

(5) $$F_2 = \frac{x}{2}\,y_2$$

Erklärung dieser Rechnung:

(3) (4) (5) selbstverständlich.

Ferner:

$$\Delta = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\left((b_1+x)y_1 - xy_2\right) \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{b_1-x}$$

also

$$\frac{\Delta}{y_1} = \frac{1}{2}\left(b_1 + x - x\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{2}\left(b_1 + x - \frac{x^2}{b_1-x}\right) = \frac{\frac{1}{2}b_1^2 - x^2}{b_1-x}$$

Dies ist aber (2).
Weiter:

$$\frac{y_2}{y_1} - 1 = \frac{x}{b_1-x} - 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\delta}{y_1} = \frac{2x-b_1}{b_1-x}$$

d. h.

$$\frac{\Delta}{y_1} = \frac{\Delta}{\delta}\,\frac{2x-b_1}{b_1-x} = \frac{\frac{1}{2}b_1^2 - x^2}{b_1-x}$$

also hat x

$$x^2 + \frac{2\Delta}{\delta}x - \left(b_1\frac{\Delta}{\delta} + \frac{1}{2}b_1^2\right) = 0$$

zu genügen, was (1) ergibt.

2. Strassbg. 364 Rs.

Weitere derartige Dreieckszerlegung (Bild).

~~Resultat: volles Recht zu [illegible]~~

3. Strassbg. 36[illegible] Rs.

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = a \qquad x + y = b$$

also „inhomogen" trotz „geometr." Terminologie x = „Länge" y = „Breite" xy = „Fläche"

Resultat: volle Algebra.

4. VAT 8520

igû und igibûm $\frac{1}{y_1}$ bzw. $y_2 = \frac{1}{y_1}$

Aufgabe: y_1 und y_2 zu bestimmen aus

$$\left.\begin{aligned} y_1 y_2 &= 1 \\ y_1 - \frac{\alpha}{\beta}(y_1 + y_2) &= \Delta \end{aligned}\right\} \alpha, \beta, \Delta \text{ gg.}$$

Rechnung: zunächst

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{\beta\Delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right)^2 + \alpha(\beta-\alpha)}$$

und daraus

$$y_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}\,x_1$$

$$y_2 = \frac{1}{\alpha}\,x_2$$

Einsetzen zeigt, dass diese Transformation bewirkt, dass die x die Wurzeln von

$$x_1 - x_2 = \beta\Delta$$
$$x_1 x_2 = \alpha(\beta-\alpha)$$

sind. Auch sonst derartige Transformation auf „Normalform" quadratischer Probleme

$$x_1 \pm x_2 = a$$
$$x_1 x_2 = b$$

zu der die Gleichungen

$$\xi^2 \mp a\,\xi \pm b = 0$$

gehören mit den Lösungen

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{bzw.} \quad \left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\,.$$

~~[illegible]~~

5. YBC 4713

Nr 1 bis 8
$$\left.\begin{matrix} xy = A \\ \alpha x = a \quad \beta y = b\end{matrix}\right\} A, a, b \text{ gg.}$$

und lineare Relation zwischen α und β. Gesucht x, y, α, β.

Nr 1. $\alpha + \beta = 9$
2. $\alpha - \beta = 1$
3. $\frac{\alpha}{2} + 1;30 = \beta$
4. $\frac{2}{3}\alpha + 0;40 = \beta$
5. $\alpha + \frac{1}{3}(\alpha-\beta) = 5;20$
6. $\alpha + \frac{2}{3}(\alpha-\beta) = 5;40$
7. $\alpha - \frac{1}{3}(\alpha-\beta) = 4;40$
8. $\alpha - \frac{2}{3}(\alpha-\beta) = 4;20$

immer ist $x=30$ $y=20$ $\alpha=5$ $\beta=4$ ein Lösungssystem (in 6 Fällen ist das zweite negativ, in zwei $x<y$).

c. Biquadratische Gleichungen.

1. VAT 8390

$$(1)\begin{cases} xy = F \\ (x-y)^2\alpha = x^2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} xy = F \\ (x-y)^2\alpha = y^2 \end{cases}$$

Also nur durch Vert. d. Buchstaben erhältlich.

Rechnung für (1) allein nötig. Man erhält

$$x^4 - \frac{2\alpha F}{\alpha-1}x^2 + \frac{\alpha F^2}{\alpha-1} = 0$$

und daraus

$$x^2 = \frac{\alpha F}{\alpha-1} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2F^2}{(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha F^2}{\alpha-1}} = \frac{F\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\mp 1}$$

also

$$x = \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{F}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}(\mp)1)}}$$

und

$$y = (\sqrt{\alpha}(\mp)1)\sqrt{\frac{F}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}(\mp)1)}}$$

Dies die Formeln d. Textes.

2. YBC 4709

Serien derartiger Aufgaben (55 Stück) mit

$$xy = A$$
$$L(x^2; y^2) = B \qquad L.\ \text{lineare Funkt.}$$

Liste ......

3. VAT 7537

Übersicht über Gruppe E Nr. 1 bis 7.
Auftreten der Null in Nr. 6 !

d. Kubische Gleichungen.

BM 85200 Kubische Gleichungen der Form:

$$\mu x = z \quad xyz = V \quad x = y \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{V}{\mu}$$
$$\mu x = z \quad xyz + xy = a \quad \alpha x = y \quad \rightarrow \quad \alpha\mu x^3 + \alpha x^2 - a = 0$$
$$\mu x = z \quad xyz + xy = a \quad x \pm y = b \quad \rightarrow \quad \mu x^3 + (1-\mu b)x^2 - bx \pm a = 0$$

Lösung durch Tabellentexte spez. für

$$n^3 + n^2 = a$$

§4. Die Rolle der Tabellentexte

a. Allgemeines.

Schon die Auflösungsmethode der kubischen Gleichungen durch Spezialtabellen verschiebt grundsätzlich die Einschätzung der „Tabellentexte". Sie greifen durchaus wesentlich in die „eigentl." math. Texte ein.

Tabellentexte sind also nur bedingt bloße Rechenhilfen. Eine andere Gruppe sind vielmehr als „Funktionstabellen" anzusprechen. Sie spielen etwa die Rolle der „elementaren" (stetigen) Funktionen in der neueren Entwicklung der Analysis, sie geben den Bereich der „erlaubten Konstruktionsmittel".

b. Die Exponentialfunktion u. ihre Umkehrung

VAT 8521 u. 8528 Zins- und Zinseszins-Rechnungen.

Das Endkapital K nach n 5-Jahresperioden mit Anfangskapital a ergibt sich bei der babyl. Zinsordnung (20% und 5-jährige Ansammlung ohne Zinseszins) zu

$$K = 2^n a$$

Die Umkehrung n aus a und K zu bestimmen scheint der Formel zu folgen:

$$n - 1 = \varphi\left(\frac{1}{2a}\left(\frac{K}{2a} - 2a\right) + 1\right) + f(2a)$$

wobei $\varphi(x) = f(x)$ also $\log_2 x$ interpret. werden kann, d.h.

$$n - 1 = \log_2 \frac{K}{4a^2} + \log_2 2a = \log_2 \frac{K}{2a}.$$

Schwierigkeiten dieser Interpretation: 1) Ursache für den Bau der Formel 2) $f(x)$ und $\varphi(x)$ können an anderen Stellen nicht gut $\log_2 x$ sein.

Terminologie überhaupt. Stamm si = šanānu „gleich sein" → Quadrat → Quadratwurzel → tabellierte Umkehrfunktion überhaupt.

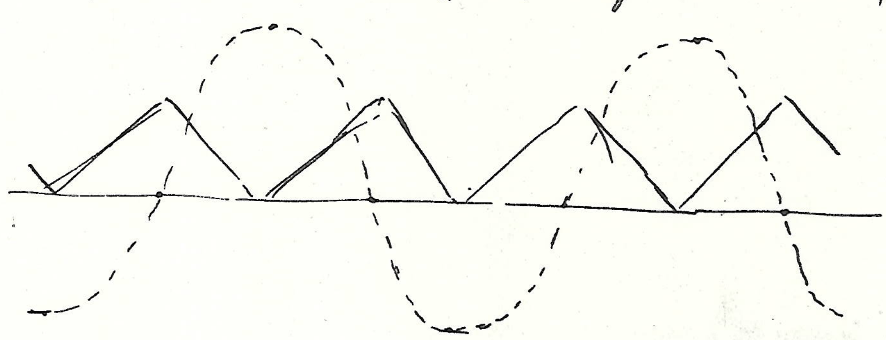
Exponentialtabellen c^n ($c = \alpha^2$?) Basiswechsel?

c. Einfluss auf die Astronomie

Nicht die Astron. sondern die Math. ursprüngl. vorh.

Tabellen-Methodik gibt Möglichkeit zu funktionaler Beschreibung.

Erzeugung „periodischer" Funktionen" aus Tabellentexten. durch „Summation" von Differenzenfolgen erster Ordnung.



§5 Rückblick u. allgem. Problem~~...~~lage

a) Die Grundlagen

Basis: d. Zahlenrechnen.

Aeg. noch nicht Rationalzahl

Bab. volle Rationalzahl + algebraische Symbolik u. Fragen.

Problem d. griech. „Zahlbegriffes". Irrationalzahl.

b.) Der mathem. Typus

Beweisbegriff[1]. Wesentlich verkoppelt mit Möglichkeit von Umformungen, also Algebra Voraussetzg. Existenz des vollen „algebr. Apparates" in Bab.

Griechisch: Frage nach dem Gültigkeitsbereich (Διορισμός). d.h. Verträglichkeits- bzw. Widerspruchs-Fragen. Reduktion d. Voraussetzungen. ~~...~~ Babylon. „interpolatorische" „naive" Stetigkeit d. Tabellentexte. Griechisch: Problem der Stetigkeit.

[1] Vgl. Aeg. Dreieck „um es viereckig zu machen"!

c. Quellen d. geschichtlichen Darstellung

Umfang d. Quellen (ca 200 Tabellentexte, ca 40 aufg. m. T. mit ca 400 Beisp.)

YBC und Traditionsbetrieb. Schulen.

Beschränkung der Texte auf spezielle Fragen.

Sinn u. Methode einer geschichtlichen Darstellung: die Tatsachen als solche so scharf als möglich herauszuarbeiten, dann aber sie so zu lebendigen Gebilden auszugestalten dass wir die geschichtlichen Prozesse als organisch möglich empfinden.