

COMPTES RENDUS  
DU  
CONGRÈS INTERNATIONAL  
DES MATHÉMATIENS  
OSLO 1936

O. NEUGEBAUER:  
ÜBER GRIECHISCHE MATHEMATIK  
UND IHR VERHÄLTNIS ZUR  
VORGRIECHISCHEN

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

---

OSLO 1937

## ÜBER GRIECHISCHE MATHEMATIK UND IHR VERHÄLTNIS ZUR VORGRIECHISCHEN

Von O. NEUGEBAUER, Kopenhagen.

Jede geschichtliche Darstellung ist mehr oder minder gezwungen, ein in Wirklichkeit von einer großen Anzahl von Parametern sehr kompliziert abhängendes Geschehen auf ein bloß *eindimensionales* Koordinatensystem, die Zeitachse, zu beziehen. Trotzdem werde ich versuchen, im Folgenden mich nicht nur darauf zu beschränken, gewisse Ereignisse aus der Entwicklungsgeschichte der Mathematik gewissen Punkten dieser Zeitachse zuzuordnen, sondern ich werde versuchen, auch die tiefern Zusammenhänge, die den Ablauf dieser Ereignisse bedingt haben, nach Möglichkeit hervortreten zu lassen. Der leitende Gesichtspunkt wird dabei sein, Ihnen zu zeigen, daß wenigstens die Geschichte der antiken Mathematik im Wesentlichen eine Geschichte der *Symbolik* ist. Dabei kann man den Begriff „antik“ sehr viel weiter fassen, als es im allgemeinen üblich ist. Die Grenze zwischen der antiken Mathematik und der modernen liegt, wie mir scheint, in der Zeit von Newton und Leibniz, wird also bestimmt durch die Entstehung der Symbolik der Differential- und Integralrechnung und damit der ganzen modernen Analysis und Mechanik, während alles, was vor dieser Zeit liegt, unter einander viel näher verknüpft ist, als mit der Entwicklung der spätern Zeit. Die Mathematik der Renaissance wiederholt eine Reihe von Entwicklungsschritten, die sich schon einmal ganz ähnlich in der vorgriechischen Mathematik abgespielt haben, und ebenso steht Kepler den Gedankengängen und Methoden der antiken Astronomie ungleich näher als den Methoden, die die analytische Mechanik nur wenig später entwickelt hat.

Ich will damit beginnen, Ihnen an einem astronomischen Beispiel auseinander zu setzen, wie ein Problem, das seinem Kern nach ein Problem der Infinitesimalrechnung zu sein scheint, von der antiken (in diesem Falle babylonischen<sup>1</sup>) Astronomie doch gelöst werden konnte unter charakteristischer Umgehung von infinitesimalen Betrachtungen — und es ist typisch, daß ganz ähnliche Gedankengänge sich auch bei Kepler wiederfinden. Die Aufgabe, die ich meine, ist folgende: Die babylonische Astronomie beschreibt periodische Vorgänge in erster Näherung durch „lineare Zackenfunktionen“, d. h. durch Differenzenreihen erster Ordnung, die zwischen zwei Extremwerten hin- und herschwanken. Mehrfach ergibt sich aber die Notwendigkeit, einen Funktionsverlauf genauer zu beschreiben als durch lineare Interpolation.

<sup>1</sup> Die babylonische rechnende Astronomie ist relativ jung. Sie gehört dem Intervall von etwa -600 bis 0 an.

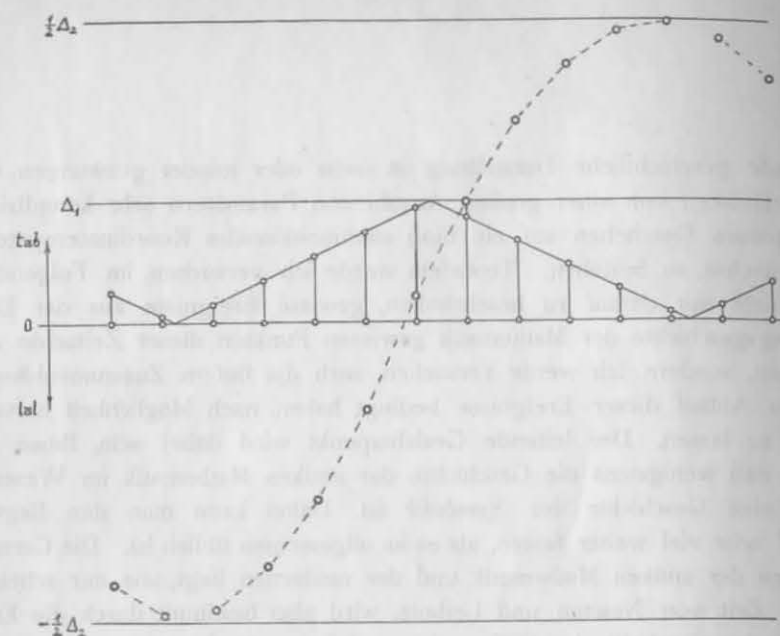


Fig. 1.

Man bildet dann Differenzenreihen zweiter Ordnung durch Summation von solchen erster Ordnung und setzt sie mit geeigneten Vorzeichen (bezeichnet mit „tab“ bzw. „lal“ gemäß Fig. 1) zusammen. Das Problem das sich so ergibt, ist offenbar die Frage, welchen Wert die Extrema der summierten Funktion haben, wenn die der ursprünglichen linearen Zackenfunktion als bekannt (etwa gleich 0 und  $\Delta_1$ ) anzusehen sind (vgl. Fig. 1). Man möchte glauben, daß die Lösung einer solchen Aufgabe die Kräfte der vorgriechischen Mathematik übersteigen müsse, denn entweder scheint man eines Integrationsprozesses zu bedürfen oder doch mindestens algebraischer Hilfsmittel, die gestatten, die Lage der Scheitel von Parabeln zu bestimmen. Die Methode, wie die babylonische Astronomie diese Aufgabe doch löst, ist für sie sehr charakteristisch. Sie beruht nämlich auf dem Gedanken, daß man, wenn man nicht Genauigkeit im Kleinen erreichen kann, so doch im Mittel korrekte Ergebnisse erzielen kann dadurch, daß man Übereinstimmung mit den äußeren Bedingungen wenigstens nach Ablauf großer Perioden erzwingt. In unserm Fall geschieht dies folgendermaßen: Da die Steigung der linearen Zackenfunktion rational ist, kehrt nach einer gewissen (oft sehr großen) Anzahl  $\Pi$  von Intervallen derselbe Zahlenwert wieder. Über eine solche große Periode läßt sich nun leicht die Summe aller Werte der linearen Zackenfunktion bestimmen. Denn es herrscht ja von beiden Enden her

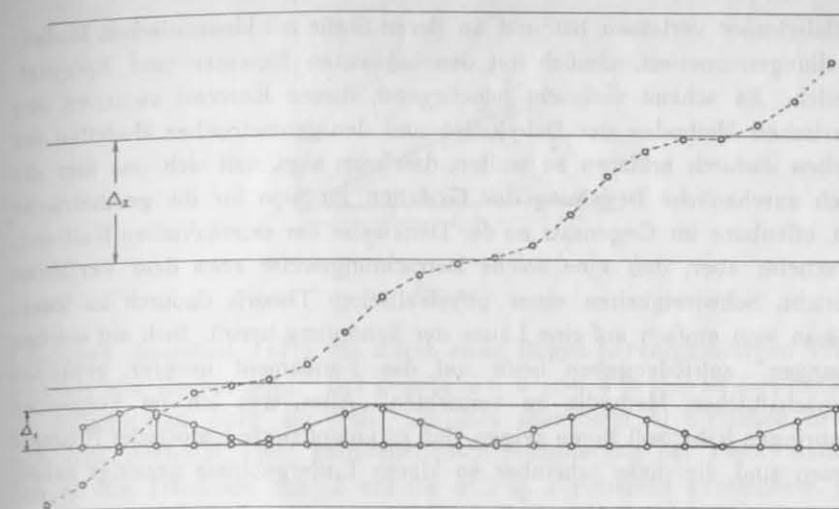


Fig. 2.

volle Symmetrie, so daß sich alle Ordinaten von links und rechts stets zur vollen Intervallhöhe  $\Delta_1$  zusammenfassen lassen, so daß man  $\frac{\Pi}{2} \Delta_1$  für diese Summe erhält. Andererseits entspricht jeder Schwingung der Länge  $P_1$  der linearen Funktion zwischen zwei benachbarten Nullstellen ein Übergang von einem Extremum der summierten Funktion bis zum nächsten, so daß die Anzahl ihrer vollen Wellen durch  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi}{P_1}$  gegeben ist. Die Gesamtänderung der summierten Funktion ist aber gleich der Ordinatensumme der linearen Funktion (vgl. Fig. 2<sup>1</sup>), so daß der gesuchte Zusammenhang zwischen der Amplitude  $\Delta_2$  der summierten Funktion und der der ursprünglichen Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Delta_2 = 2 \frac{\Delta_1}{P_1}.$$

Diese hier geschilderten numerischen Methoden, die wir analog auch in der babylonischen Mathematik wiederfinden werden, sind, wie gesagt, für die gesamte babylonische Astronomie charakteristisch. Im vollen Gegensatz zu ihr steht die griechische Astronomie, die sich zwar in allen numerischen Konstantenbestimmungen der babylonischen Resultate bedient, zur Beschreibung der Vorgänge im Ganzen aber die rein numerischen Verfahren

<sup>1</sup> Dabei ist der Übersichtlichkeit halber für die summierte Funktion die Darstellung in Periodenstreifen gewählt.

der Babylonier verlassen hat und an deren Stelle mit kinematischen Modellvorstellungen operiert, nämlich mit den bekannten Exzenter- und Epizykelmodellen. Es scheint vielleicht naheliegend, diesen Kontrast zwischen den numerischen Methoden der Babylonier und den geometrischen Modellen der Griechen dadurch erklären zu wollen, daß man sagt, daß sich uns hier die typisch anschauliche Begabung der Griechen, ihr Sinn für die geometrische Form, offenbare im Gegensatz zu der Denkweise der orientalischen Kulturen. Mir scheint aber, daß eine solche Betrachtungsweise etwa dem Verfahren entspricht, Schwierigkeiten einer physikalischen Theorie dadurch zu lösen, daß man sich einfach auf eine Laune der Schöpfung beruft. Sich mit solchen „Lösungen“ zufriedengeben heißt auf das Fundament unserer gesamten wissenschaftlichen Methodik zu verzichten. Alles, was ich im Folgenden vorzubringen habe, soll Ihnen zeigen, daß es komplizierte historische Prozesse gewesen sind, die diese scheinbar so klaren Endergebnisse zeitigt haben.

Wir beginnen die Diskussion der griechischen Mathematik sogleich mit der Frage, ob es berechtigt ist, ihr einen überwiegend geometrischen Charakter zuzusprechen. Im Rahmen dieser Frage ist es wichtig, sich darüber Klarheit zu verschaffen, ob z. B. in der Tat der Existenzbeweis der Lösung eines Problems verknüpft ist mit der Konstruierbarkeit derselben durch Zirkel und Lineal, wie dies ja oft als gesicherte Tatsache hingestellt wird. Nun ist es leicht, bereits an einem Beispiel zu zeigen, daß wenigstens in der ältern Zeit der griechischen Mathematik ein solches Postulat nicht bestanden haben kann. Ich erinnere zu diesem Zweck nur an die von Archytas gegebene und als solche anerkannte „Lösung“ des Problems der Würfelverdopplung. Dieses Problem erweist sich bekanntlich als Verallgemeinerung der Auffindung des geometrischen Mittels  $x$  zwischen zwei Größen  $a$  und  $b$ , indem nämlich die Aufgabe,  $x$  so zu bestimmen, daß  $a:x=x:b$  erfüllt ist, erweitert wird zu der Aufgabe, zwei Größen  $x$  und  $y$  so zu bestimmen, daß  $a:x=x:y=y:b$  gilt (wobei  $b=2a$  dem Fall der „Würfelverdopplung“ entspricht). Die Lösung des Archytas beruht nun auf einer naheliegenden Übertragung des im Fall des geometrischen Mittels

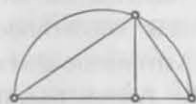


Fig. 3.

trivialen Verfahrens, das durch Fig. 3 gekennzeichnet wird. Unmittelbar aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt nämlich wie dort, daß in dem in Fig. 4 gekennzeichneten Streckenzug die mit  $x$  und  $y$  bezeichneten Strecken die

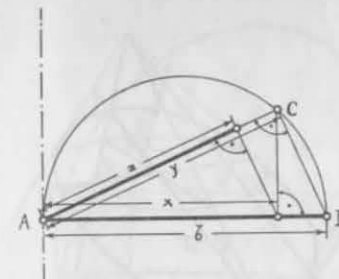


Fig. 4.

Lösungen darstellen, falls die durch einen Bogen hervorgehobenen Winkel wirklich alle Rechte sind. Bei gegebenem  $a$  und  $b$  ( $a < b$ ) ist dies natürlich im Allgemeinen nicht der Fall. Um dies aber doch zu erreichen, bedient sich nun Archytas einer kontinuierlichen Abänderung der Figur, dadurch, daß er den Halbkreis über  $b$  um die in Fig. 4 punktiert gezeichnete, in  $A$  tangierende Achse dreht, so daß der für die Lösung entscheidende Punkt  $C$  einerseits auf einem Torus der Öffnung Null liegen muß; andererseits kann man leicht zeigen, daß er auch auf einem Zylinder des Durchmessers  $b$  sowie auf einem gewissen Kegel mit der Spitze in  $A$  liegen muß. So ergibt sich die Lösung als Schnittpunkt zwischen Raumkurven, die ihrerseits Schnitte zwischen einfachen Rotationsflächen sind. Die Einzelheiten dieses Verfahrens sind im gegenwärtigen Zusammenhang nebensächlich. Worauf es uns hier allein ankommt, ist die Hervorhebung der Tatsache, daß es sich hier um ein als Lösung anerkanntes Verfahren handelt, das gewiß nicht Zirkel-Linealkonstruierbar ist. Darüber hinaus hat eine sorgfältige Untersuchung dieses ganzen Fragenkreises durch A. STEELE<sup>1</sup> gezeigt, daß auch sonst von einer systematischen Einschränkung auf erlaubte Konstruktionsmittel nicht die Rede sein kann. Unterstrichen wird dieser Zusammenhang noch dadurch, daß Archytas selbst mit aller Deutlichkeit betont hat, daß dort, „wo die Geometrie versagt, erst die Rechentechnik („Logistik“) Beweise zustande bringt“. Wir sehen also, daß mindestens zu Beginn der klassischen Periode der griechischen Mathematik von einem beabsichtigten Vorrang der Geometrie nicht gesprochen werden kann.

Anders scheint dies am Schluß der klassischen Periode, etwa bei Apollonius, zu stehen. Ein Beispiel soll dies wieder erläutern. Ausgehend von dem Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel läßt sich durch einfache Überlegungen zeigen, daß die in Fig. 5 als  $y$  bezeichnete Größe der Relation genügt

$$(1) \quad y^2 = x \left( \eta - \frac{\eta}{\xi} x \right).$$

<sup>1</sup> Bonner Dissertation (bei O. TORPLITZ). Siehe das Literaturverzeichnis am Schluß.

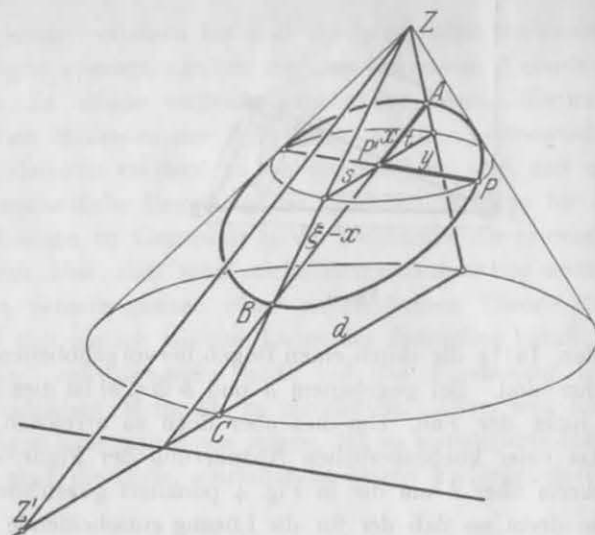


Fig. 5.

Dies folgt einfach daraus, daß ja  $y$  auch dem in Fig. 5 eingezeichneten basisparallelen Hilfskreis angehört, so daß  $y^2 = st$  ist, und sich die Größen  $s$  und  $t$  leicht durch die charakteristischen Parameter, die die Lage des Schnittes kennzeichnen, ausdrücken lassen. So entsteht die Gleichung (1), wobei  $\xi$  den Durchmesser der Schnittellipse bezeichnet, während  $\eta$  eine andere, leicht geometrisch interpretierbare Konstante bedeutet. Das Wesentliche ist aber, daß diese „Ellipsengleichung“ und alle daraus zu ziehenden Folgerungen bei Apollonius nicht in der Form einer Gleichung zwischen algebraischen Symbolen auftritt, sondern als Relationen zwischen Flächeninhalten interpretiert wird. Im Fall der Ellipsengleichung heißt diese Interpretation der Formel (1) folgendermaßen: Das Quadrat über der Strecke  $y$  ist gleich einem Rechteck, das an die Strecke  $\eta$  „angelegt“ wird, aber nicht ganz die Kante  $\eta$  beansprucht, sondern um ein Stück zurückbleibt, so daß der freigelassene Raum ein Rechteck bildet, dessen Diagonale die vorgeschriebene Steigung  $\frac{\eta}{\xi}$  hat (vgl. Fig. 6). Diese Aufgabe der Verwandlung

einer vorgelegten Fläche in eine Rechtecksfläche mit einem Defizit vorgeschriebener Form bzw. im hyperbolischen Fall mit vorgeschriebener Art des Überschusses wird als die Aufgabe der „Flächenanlegung“ bezeichnet.

Wie gesagt, ist dies die Form, mit der bei Apollonius die Lehre von den Kegelschnitten behandelt wird. Er hat damit die Behandlung der zunächst räumlich definierten Kurven reduziert auf Beziehungen zwischen Arealen der Ebene. Historisch wichtig und äußerst merkwürdig ist aber

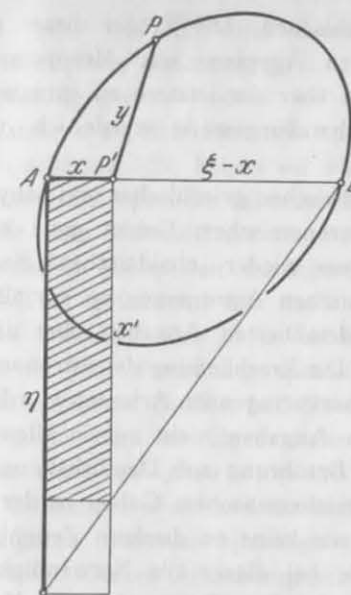


Fig. 6.

dabei der Umstand, daß die Aufgabe der Flächenanlegung nicht etwa, wie es zunächst scheinen könnte, etwas ist, was aus der Theorie der Kegelschnitte in der oben angegebenen Weise entstanden ist, sondern daß diese Aufgabe als solche viel älter ist, älter als die Theorie der Kegelschnitte überhaupt. Sie bildet nämlich das Kernstück großer Abschnitte bei Euklid. Vor allem ZEUTHEN hat erkannt,<sup>1</sup> daß es sich hier um die geometrische Form algebraischer Methoden handelt, nämlich um die Behandlung der quadratischen Gleichungen. Er hat für diesen ganzen Fragenkreis den treffenden Ausdruck „geometrische Algebra“ geprägt. So stehen wir also vor der eigentümlichen Tatsache, daß es einerseits eine Reihe von Erscheinungen gibt, die zeigen, daß in der frühgriechischen Mathematik keineswegs eine klare Beschränkung auf eine rein geometrische Formulierung der Probleme existiert, andererseits aber rein algebraische Fragen in einer so merkwürdigen geometrischen Einkleidung erscheinen, daß es zunächst ganz unverständlich erscheint, wie gerade diese Einkleidung an der Spitze der Entwicklung stehen soll.

Die Erklärung für diesen merkwürdig komplexen Charakter der griechischen Mathematik liegt einfach darin, daß die „griechische“ Mathematik von den Anfängen mathematischen Denkens ungefähr ebensoweit entfernt ist,

<sup>1</sup> Vgl. das Literaturverzeichnis.

wie wir von der griechischen. Die Träger dieser vorgriechischen Mathematik sind die Kulturen Ägyptens und Mesopotamiens. Ich werde im Folgenden hauptsächlich über die letztere zu sprechen haben. Die Gründe für diese ungleiche Behandlungsweise werde ich noch ganz am Schluß streifen.

Die Verknüpfung zwischen griechischer und babylonischer Wissenschaft liegt vor allem auf astronomischem Gebiet ganz klar zutage. Ptolemäus zitiert im *Almagest* immer wieder „chaldäisches“ Beobachtungsmaterial und auch bei andern griechischen Astronomen, so vor allem bei Geminus, findet sich eine Reihe von detaillierten Angaben über die Methoden der babylonischen Astronomie. Die Erschließung der astronomischen Keilschrifttexte, die man vor allem den hervorragenden Arbeiten von F. X. KUGLER verdankt,<sup>1</sup> haben die griechischen Angaben nicht nur in allen Einzelheiten bestätigt, sondern die Nähe der Berührung aufs Deutlichste und in zahlreichen Einzelheiten erwiesen. Auf mathematischem Gebiet ist der Kontakt zweifellos kein geringerer, nur haben wir keine so direkten Zeugnisse wie bei der Astronomie, da ja nicht wie bei dieser die Notwendigkeit expliziter Quellenangaben vorlag. Aber der Begriff „griechische“ Mathematik ist ja keineswegs etwas Einheitliches. Was man im Allgemeinen darunter versteht, ist ja nur ihr höchst entwickelter Zweig, wie er uns aus den Werken von Euklid, Archimedes und Apollonius entgegentritt. Einen ganz andern Typus hat aber beispielsweise der Heronisch—Diophantische Schriftenkreis, der seinem ganzen Typus nach die engsten Beziehungen zur altorientalischen Mathematik aufweist. Es kann heute nicht mehr bezweifelt werden, daß ein großer Teil des materiellen Inhaltes dieser Schriften aus vorgriechischen, d. h. in erster Linie aus babylonischen Quellen stammt. Eine Fülle von elementargeometrischen Kenntnissen, Flächen- und Volumbestimmungen und dergleichen findet sich in allen Texten während der anderthalb Jahrtausende babylonischer Mathematik. Hier ist also der Anschluß praktisch genau so eng und genau so evident wie bei der Astronomie. Das eigentlich Überraschende an der babylonischen Mathematik ist aber die Tatsache ihres erstaunlich algebraischen Charakters. Ähnlich wie bei Heron tritt nämlich schon dort eine vollständige Gleichgültigkeit gegen die geometrische Bedeutung der Größen, mit denen operiert wird, zutage. Strecken werden zu Flächen addiert, Flächen multipliziert u. s. w., d. h., es handelt sich um Aufgaben, bei denen nur das wesentlich ist, was wir heute als algebraische Relationen bezeichnen. So gibt es Auflösungen von linearen Gleichungen mit zahlreichen Unbekannten, ferner Probleme 2-ten, 4-ten und 6-ten Grades (sämtlich quadratisch lösbar), Gleichungen 3-ten Grades, Zinzeszinsaufgaben

<sup>1</sup> Vgl. das Literaturverzeichnis.

und manches Ähnliche mehr. Ein Kernstück dieser Algebra ist offenbar die Lehre von den quadratischen Gleichungen, die ganz in unserer Weise durch quadratische Ergänzung gelöst werden. An die eingangs erwähnten Methoden knüpft die Tatsache an, daß auch rein numerische Methoden eine große Rolle zu spielen scheinen. So haben wir eigene Tabellen z. B. für die Zahlen  $n^3 + n^2$ , womit man spezielle kubische Gleichungen lösen kann, für  $a^n$  und anderes mehr. Die Mehrzahl der eben erwähnten algebraischen Aufgaben ist an numerischen Beispielen durchgerechnet. WASCHOW hat aber neuerdings einen Text gefunden,<sup>1</sup> der auch den längst erwarteten Beweis erbringt, daß es Aufgaben gibt, die in voller Allgemeinheit durchgerechnet sind, d. h. ohne jede Benutzung spezieller Zahlen, nur unter Kombination der für die einzelnen Größen und Operationen gebräuchlichen Symbole. Besonders deutlich tritt der algebraische Charakter der babylonischen Mathematik in einer als „Serientexte“ bezeichneten Klasse von Tontafeln hervor. Es handelt sich dort um viele Hunderte von systematisch geordneten Aufgaben, die vom einfachen zum komplizierten fortschreitend angeordnet sind. Dieses Anordnungsprinzip führt übrigens auf Grund eines schematischen Variierens der Angaben der Beispiele unter anderm auch dazu, daß man sich nicht scheut, die rechte Seite einer linearen Verknüpfung zwischen den Unbekannten als „negative“ Zahlen zu bezeichnen, eben mit jenem Symbol „*lal*“, das uns schon bei den astronomischen Texten (vgl. Fig. 1) begegnet war. Man kann aus dem Anordnungsprinzip der Aufgaben viel über die zugrundeliegende Theorie entnehmen. Ein Hauptergebnis ist das, daß man bei den quadratischen Gleichungen für zwei Unbekannte ein komplizierteres System auf eine „Normalform“ zu reduzieren suchte, nämlich auf Produkt und Summe oder Differenz der Unbekannten als gegebene Größen. Daraus läßt sich dann unmittelbar die übliche Auflösungsformel gewinnen.

Die Existenz einer solchen Theorie der quadratischen Gleichungen gibt nun auch den Schlüssel für das Verständnis der oben erwähnten eigentümlichen Form der „geometrischen Algebra“, insbesondere der „Flächenanlegung“. Das Problem der Flächenanlegung ist nämlich nichts anderes als die geometrische Einkleidung jener Normalform. Die gegebene Fläche ist durch das Produkt der Unbekannten repräsentiert und die Strecke, an die angelegt werden soll, entspricht der Summe der Unbekannten, wobei ein Quadrat freibleibt (vgl. Fig. 7). Auch das Lösungsverfahren bei Euklid ist nichts anderes als eine Übertragung des babylonischen Verfahrens ins Geometrische.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Er wird im Rahmen eines in Vorbereitung befindlichen Ergänzungsheftes meiner „Mathematischen Keilschrift-Texte“ publiziert werden (BM 34568).

<sup>2</sup> Für die Einzelheiten vgl. meine Arbeit „Zur geometrischen Algebra“ (s. Literaturverzeichnis).

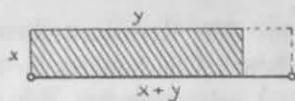


Fig. 7.

Materiell erweist sich somit die geometrische Algebra als die direkte Fortsetzung der vorgriechischen Algebra, nur mit einem charakteristischen Wechsel der Symbolik. An Stelle einer mit gewissen konventionellen Symbolen operierenden Algebra (über die Art dieser Symbole wird gleich noch zu sprechen sein) tritt die rein geometrische Ausdrucksweise. Neu ist aber nur die Form, nicht der Inhalt.

Die Gründe für die Geometrisierung großer Teile der griechischen Mathematik sind an sich seit langem bekannt. Es sind im Wesentlichen zwei Strömungen, die sich hier begegnen. Einerseits die Schwierigkeiten, die sich aus den gegen den Kontinuumsbegriff gerichteten Paradoxieen ergaben (was z. B. für jene Art Stetigkeitsschlüsse, wie wir sie in der kinematischen Methode des Archytas vorfanden, sehr wesentlich war), andererseits die Musiktheorie, deren Rolle für die Entwicklung der Proportionenlehre und die Entdeckung der Irrationalitäten wohl P. TANNERY als erster erkannt hat.<sup>1</sup> Um nur auf den letzten Punkt kurz hinzuweisen, sei daran erinnert, daß ungefähr in der Epoche des Archytas der Zusammenhang der Klänge mit einfachen Zahlenverhältnissen entdeckt worden ist, samt dem zugehörigen Kompositionsgesetz, das angibt, daß diese Verhältniszahlen multiplikativ zusammen zu fassen sind. So erscheint beispielsweise die Entstehung der Oktav aus Quart und Quint als  $\frac{2}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$ . Die

Frage, ob sich die Oktav nicht auch in zwei gleiche Töne zerlegen lasse, führt dann unmittelbar zu der Frage, ob es möglich sei,  $\frac{2}{1}$  als  $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$  darzustellen. Und dies ergibt sogleich den bekannten Widerspruch, daß dann  $p$  und  $q$  „gleichzeitig gerade und ungerade“ sein müßten. Von dieser arithmetischen Einsicht aus ergibt sich schließlich wegen des Pythagoreischen Lehrsatzes (der seinerseits schon seit einem Jahrtausend in den keilschriftlichen Texten immer wieder vorkommt) die Tatsache der Inkommensurabilität von Quadratdiagonale und Quadratseite, kurz alle Erkenntnisse, die zeigen, daß der Bereich der geometrischen Größen allgemeiner ist als der der rationalen Zahlen. Eine Konsequenz dieses Sachverhaltes ist es dann, daß man daran ging, alles, was bisher aus dem Bereich der elementaren Arithmetik und Algebra bekannt war, in eine geometrische und gleichzeitig

vor dem philosophischen Angriff möglichst gesicherte Form zu umschreiben. Die eigentliche Leistung der Griechen liegt dann in dem verfeinerten Ausbau und der logischen Analyse dieser neuen mathematischen Sprache.

Wir haben gesehen, daß die entscheidenden Ereignisse in der Geschichte der griechischen Mathematik erst verständlich werden, wenn man sie in ihrer Relation zu einer langen Vorgeschichte betrachtet, die das Material bereitgestellt hat, dessen Ordnung und Klärung die Griechen unter dem neuen Gesichtspunkt der größeren Allgemeinheit des geometrischen Bildes vorgenommen haben. Aber auch in der griechischen Mathematik ist die Geometrie in gewisser Hinsicht immer nur die um ihrer Strenge und Allgemeinheit willen bevorzugte Ausdrucksform für algebraische oder analytische Prozesse geblieben und nicht so sehr um ihrer selbst willen als gesonderte Disziplin entwickelt worden. Erst in ihrer allerletzten Periode finden sich Ansätze zu projektiven oder synthetischen Betrachtungsweisen, die an sich eine sehr viel weitere Entwicklung gestattet hätten, wie die Geschichte des 19-ten Jahrhunderts lehrt. Die Hauptrichtung der Entwicklung war aber während der ganzen Zeit bedingt durch die von den Anfängen her bestimmte Richtung nach der Schaffung einer verallgemeinerten Symbolik zum Ausdruck von Beziehungen, deren Ursprung eigentlich ein anderer war. Dies zeigt sich noch deutlich in dem eigentümlichen Algorithmus von Relationen zwischen Flächengrößen in der Theorie der Kegelschnitte und ebenso bei den Archimedischen Infinitesimalmethoden.

In der gesamten vorgriechischen Mathematik liegt überhaupt kein Anlaß zu einer Bevorzugung des Geometrischen vor. Überall zeigt sich da, daß die Geometrie nur eines der Anwendungsgebiete der Rechentechnik ist, und daß eine fruchtbare Entwicklung erst dort einsetzt, wo die arithmetisch-algebraischen Verfahren weit genug ausgebildet sind. Hier ist der Punkt, wo der Vergleich zwischen der ägyptischen und der babylonischen Mathematik besonders lehrreich ist. In beiden Kulturen können wir heute aus sprachlichem und archäologischem Material die Entstehung der Zahlzeichen, der Zahlworte und der allmählich sich ausbildenden Rechentechnik verfolgen. Die Anfänge der Rechentechnik sind sowohl in Ägypten wie in Babylonien rein additiv,<sup>1</sup> in Ägypten noch bis in die späteste Zeit erhalten in der ursprünglichsten Form eines fast rein dyadischen Rechenalgorithmus. Dieser elementarste Algorithmus erstreckt sich dabei keineswegs auf einen homogenen Bereich von Zahlen, sondern es ist nur eine kleine Gruppe

<sup>1</sup> Vgl. die im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten von TANNERY und E. FRANK.

<sup>1</sup> So ist beispielsweise das Keilschriftzeichen für das „positive Vorzeichen“ „tab“, das wir oben erwähnt haben, und dessen Bedeutung „hinzufügen“, „addieren“ ist, dann auch „multiplizieren“ bedeutet, ursprünglich das Bild des „Verdoppelns“, ausgedrückt durch zwei parallele Striche.

von ganzen Zahlen und Brüchen, mit denen ernstlich gerechnet wird. Die merkwürdige ägyptische Bruchrechnung, die noch die griechische und römische Logistik im Wesentlichen beibehalten hat, läßt sich verstehen als ein eigentümliches Reduktionsverfahren des allmählich sich ausdehnenden Zahlbereichs auf jenen ältesten Kern unter ausschließlicher Verwendung einer dyadischen Methodik. In Babylonien ist in einer sehr frühen Phase dieser Entwicklungsprozess abgebrochen worden. Das Wesentliche dabei ist die Entstehung einer positionellen Ziffernschreibung, das heißt einer Ausdrucksweise der Zahlen, die nur mit einer geringen Anzahl immer wiederholter Symbole auskommt. Auch diese Symbolik ist natürlich keine beabsichtigte Konstruktion, sondern erwachsen aus komplizierten Prozessen der Ordnung der sich allmählich entwickelnden Maßsysteme, Vorgänge, deren Einzelheiten ich hier nicht auseinandersetzen kann.<sup>1</sup> Für die weitere Entwicklung ist aber die Existenz eines derartigen positionellen Rechenverfahrens von einschneidender Bedeutung gewesen. Ohne dieses hätte die babylonische Mathematik nie jenen Grad der Entwicklung erreichen können, der sie so deutlich vor der ägyptischen Mathematik mit ihrem schwerfälligen und komplizierten Rechenmechanismus auszeichnet. So stand der babylonischen Mathematik von ihrer frühesten Zeit an der ganze Bereich der Rationalzahlen wirklich zur Verfügung. Aus dieser Rechentechnik hat ein Jahrtausend später nicht nur die babylonische Astronomie den größten Nutzen gezogen, sondern auch die daran anschließende griechische und arabisch-mittelalterliche.<sup>2</sup>

Für die weitere Entwicklung der babylonischen Mathematik ist aber noch ein zweites Moment von mindestens ebenso großer Bedeutung, nämlich die Entstehung einer in ihrem Effekt „algebraisch“ zu nennenden Symbolik. Auch hier handelt es sich keineswegs um eine bewußte Erfindung, sondern um das Resultat geschichtlicher Phänomene ganz anderer Herkunft. Hier greift nämlich die Geschichte der Keilschrift ein. Sie wurde als Bilderschrift von den ersten Bewohnern Mesopotamiens, den Sumerern, erfunden.<sup>3</sup> Dem Charakter einer Bilderschrift entsprechend ist dadurch eine Abbildung

<sup>1</sup> Vgl. diesbezüglich meine im Literaturverzeichnis genannten „Vorlesungen“.

<sup>2</sup> Es scheint mir höchst wahrscheinlich, daß die Wirkung dieses Positionssystems noch sehr viel weiter geht, nämlich daß die Idee der Position eben auf dem Umweg über die Astronomie von Griechenland nach Indien gekommen ist und dort den Anstoß zur Erfindung unseres dezimalen Positionssystems gegeben hat. Vgl. dazu meine Bemerkungen in meiner Rezension des Buches von DATTA und SINGH „History of Hindu Mathematics“ in „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik“ Abt. B 3, S. 263 ff.

<sup>3</sup> Wie weit der Begriff „sumerisch“ wirklich etwas Einheitliches umfaßt, wird gegenwärtig viel diskutiert. Für unsere Zwecke genügt die ungefähre Datierung der Schriftentstehung in die Mitte des vierten Jahrtausends, während die ältesten eigentlich mathematischen Texte etwa der Zeit um 1900 angehören.

von Begriffen auf Einzelzeichen hergestellt. Im Lauf des dritten vorchristlichen Jahrtausends ist diese ältere Bevölkerungsschicht allmählich ersetzt worden durch die semitischen Akkader, die die Keilschrift übernommen haben und in doppelter Weise für die Schreibung ihrer Sprache verwendet haben. Einmal, indem sie die Einzelzeichen nach wie vor als Symbole für Begriffe benutzten, dann aber, indem sie auch die Zuordnung dieser Zeichen zu den sumerischen Worten rein als Lautsymbole benutzten und so dieselbe Zeichenmenge auch zu einem silbenschriftlichen Ausdruck ihrer eigenen Sprache verwenden konnten. Dieses Wechselspiel zwischen Silbenschrift und Symbolschrift ist für die Entwicklung der Mathematik entscheidend geworden. Denn immer mehr hat man die Möglichkeit erkannt, diese Symbole zum Ausdruck mathematischer Operationen zu benutzen und so eine reine Formelschrift zu entwickeln, die sich unmittelbar Zeichen für Zeichen in unsere moderne algebraische Formelschrift übersetzen läßt.

Auch diese Entwicklung wäre nicht möglich gewesen, wenn nicht tiefere sprachliche Phänomene dahinterständen. Die eben skizzierte doppelte Verwendungsmöglichkeit der Keilschriftzeichen beruht nämlich ganz wesentlich auf einem grundsätzlichen Unterschied der Sprachtypen des Sumerischen und des Akkadischen, der sich unter anderm darin ausspricht, daß das Sumerische im Gegensatz zum Akkadischen eine Sprache ist, die im Wesentlichen mit einsilbigen und vokalkonstanten Elementen operiert. Nur dadurch ist ja die Möglichkeit gegeben, die sumerischen Wortzeichen gleichzeitig als Silbenzeichen mit bestimmtem Lautwert zum Aufbau einer Silbenschrift zu verwenden. So sehen wir, daß es in letzter Linie sprachgeschichtliche Phänomene sind, die den eigentümlichen Charakter der babylonischen Mathematik bestimmt haben. Die Beziehung zu einem der interessantesten Zweige der modernen Philologie, der vergleichenden Sprachwissenschaft, ist aber nicht die einzige, die die älteste Geschichte der Mathematik mit der Philologie verknüpft. Auch die Analyse der Entstehungsgeschichte der Zahlbegriffe überhaupt, z. B. der wechselnden Rolle zwischen Ordinalzahlbegriff und Kardinalzahlbegriff, führt, wie vor allem SETHE's bahnbrechende Untersuchungen gelehrt haben, hinüber zu rein sprachgeschichtlichen Untersuchungen. Mir scheint, daß dies mehr ist als eine bloß zufällige Verkettung historischer Ereignisse. Ist doch die Sprache nur die älteste Form einer Symbolik, aus der sich in einer wechselvollen Geschichte einer stets verfeinerten Analyse eine höchste Form menschlicher Symbolik entwickelt hat: die Mathematik.

## Literaturverzeichnis.

- FRANK, E., Plato und die sogenannten Pythagoreer. Halle 1923.
- KUGLER, F. X., Die babylonische Mondrechnung. Freiburg 1900.
- Sternkunde und Sterndienst in Babel. Münster 1907 ff.
- NEUGEBAUER, O., Mathematische Keilschrift-Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A 3, Berlin 1935, 1937.
- Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Bd. 1: Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934.
  - Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung. Berlin 1926.
  - Zur geometrischen Algebra. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 3, S. 245 ff. 1936.
- SETHE, K., Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern. Straßburg 1916.
- STEELE, A. D., Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 3, S. 287 ff. 1936.
- TANNERY, P., Mémoires Scientifiques III, S. 68 ff.: Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. 1902.
- ZEUTHEN, H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886.

## Korrekturzusatz.

Für die mathematischen Methoden der babylonischen Astronomie vgl. jetzt noch:

- NEUGEBAUER, O., Untersuchungen zur antiken Astronomie II. Datierung und Rekonstruktion von Texten des Systems II der Mondtheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 4, S. 34 ff. 1937.
- Untersuchungen zur antiken Astronomie III. Die babylonische Theorie der Breitenbewegung des Mondes. Erscheint in Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 4.

Für den algebraischen Charakter der Serientexte und ihre Beziehungen zur griechischen Mathematik siehe

- VOGEL, K., Bemerkungen zum Nachleben der babylonischen Mathematik. Diese Kongressberichte Bd. 2, S. 277 f., 1937.