Vortrag über A.R.T. und Weyl.

Über die Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie durch Hermann Weyl.

Vortrag, gehalten in den „Besprechungen physikalischer Fragen" Graz 6. und 7. Juli 1921.

1. Teil.

Grundlagen.

Einleitung.

Wir haben uns daran gewöhnt, die Ergebnisse physikalischer Untersuchungen in einer gewissen apodiktischen Art auszusprechen, die nicht ganz gerechtfertigt erscheint, wenn man mit aller Strenge vorgehen will. Wir sagen: Der Gleichgewichtsverteilung von Elektrizität auf einer leitenden Kugel, entspricht konstante Oberflächendichte. Man ist sich kaum mehr bewusst, dass eine solche Aussage nur das Ergebnis einer weitgehenden Abstraktion ist: „leitend", „Kugel", sind Grenzbegriffe; geradeso, wie die Vernachlässigung der ganzen Umgebung. Und schliesslich sprechen wir von Elektrizität allein, während tatsächlich Temperatur, Gravitation und Anderes eine Rolle spielen mögen.

Dieses auf Abstraktion gegründete Verfahren ist nur all'zu leicht ~~verständlich~~. In eine Natur unbegreiflicher Fülle der Erscheinung hat das Schicksal den Menschen gestellt – und nicht nur kämpfend steht er ihr gegenüber, sondern auch erkennend. Noch in der Frühzeit der Geschichte hat man nicht gewagt, allein gestützt auf die Fähigkeiten des eigenen Geistes sich die Natur begreiflich zu machen. Mythos, Götter und Dämonen müssen dort eingreifen, wo des Unbegreiflichen zu viel ist. Nur ein Teil der Erscheinung schien leichter zugänglich zu sein: ihre Form, die Gestalt. Aus der Idealisierung der Formen realer Körper entstehen Grenzbegriffe die nun, allein für sich, Gegenstand einer ersten Wissenschaft der „Geometrie" sein konnten. Diese Entstehungsgeschichte spiegelt sich noch deutlich in den „Erklärungen" des Euklid:

Euklids Elemente 1. Buch „Erklärungen"[*]

„1. Was keine Teile hat, ist ein Punkt.

2. Eine Länge ohne Breite ist eine Linie."

Sich in zähem Ringen, auf einem an Irrtümern reichen Weg, auch noch Einblick in die andre Seite der Erscheinung zu verschaffen blieb einer ~~zweiten~~ Wissenschaft vorbehalten: der Physik.

Von hier aus lässt sich etwas leicht verstehen, was sich uns in viel späterer

---

[*] zitiert nach Engel u. Stäckel: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss" ebenso auch alle folgenden Euklid-Zitate.

Stelle deutlich zeigen wird: Wenn eine solche Teilwissenschaft, wie sie notwendigerweise aus einer Idealisierung entsteht, eine gewisse Höhe der Vollendung erreicht hat, so muss sie vor der Notwendigkeit stehen, die willkürlich gezogenen Grenzen ihres Gebietes zu erweitern. Jede vollendete Wissenschaft führt über sich selbst hinaus.

Geometrie

Wir wenden uns nun der Besprechung der Geometrie zu. Von vorneherein lasse ich aber eine einseitige Beschränkung walten. Es liegt durchaus nicht in meinem Plane die Entwicklung einer ausgedehnten mathematischen Disziplin zu schildern. Nur einem einzigen dünnen Stromfaden wollen wir nachgehen, der ~~vom~~ berühmten „Parallelenaxiom" Euklids seinen Ausgang nimmt.

Euklid.

Dieselbe Epoche der griechischen Geschichte, die uns als Periode des Verfalles von Kunst und Sitte, als Zeit politischen Niederganges erscheint – es ist die sogen. alexandrinische Zeit – dieselbe Periode bedeutet andrerseits einen Höhepunkt jahrhundertelanger Entwicklung. Alexandria, die Weltstadt, die Vereinigung wirtschaftlicher und kultureller Gebiete des alten Orients und gleichzeitig die Erbin griechischer Kultur, war die Heimat Euklids. Sein berühmtes Werk „Die Elemente" bilden – zusammen mit den Schriften Aristoteles – das Fundament aller wissenschaftlichen Tätigkeit der folgenden $1\frac{1}{2}$ Jahrtausende. Euklids Ruhm ist begründet: es ist ihm gelungen ein in sich widerspruchsloses System der Geometrie zu schaffen.

Unserem Plane gemäss zitiere ich aus seinem Werk nur zwei Stellen. Nämlich die 23. „Erklärung" und das berühmte 5. „Postulat".

Euklid's Elemente 1. Buch

„23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und, nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen."

Und dann weiter die „Postulate":

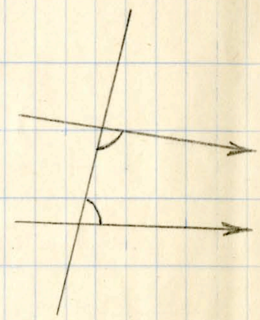
„1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich sein sollen.

5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schliesslich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte."

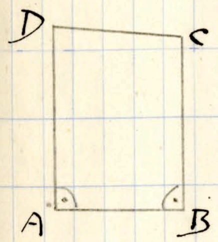


Beweise.

Wenn man in Betracht zieht, wie viel einfacher die ersten 4 Postulate sind, als das 5.te und wenn man bedenkt, dass die Umkehrung schon beweisbar ist, so wird es verständlich, dass man seit frühester Zeit getrachtet hat, dieses „Postulat" zu beweisen. Die Forderung lässt sich auch in die heute gebräuchliche Form übertragen: Zu beweisen, dass es zu einer Geraden durch einen Punkt nur eine Parallele gibt! Die Versuche dieses Postulat zu beweisen ziehen sich hin bis Griechen und Arabern. Das Ergebnis ist immer die Einführung eines andern – ebenso schwer beweisbaren – Postulates.

Saccheri.

Die Sache wird erst gründlich anders angepackt von einem Mathematikprofessor der Universität Pavia, dem Jesuitenpater Girolamo Saccheri. 1733 erscheint sein Buch „Der von jedem Makel befreite Euklid." Er hat sich ein eigenartiges Beweisverfahren gebildet. Er



betrachtet ein Viereck ABCD. Die Winkel A B sind rechte, die Seiten AD und BC gleich. Er untersucht nun die ~~beiden~~ folgenden Fälle 1.) Die beiden Winkel C,D sind spitz: „Hypothese des spitzen Winkels" wie er es nennt 2.) sie sind Rechte – diese „Hypothese des rechten Winkels" entspricht dem Euklidischen Falle, – und 3.) die „Hypothese des stumpfen Winkels": C,D sind stumpf. Er will nun die Konsequenzen aller dreier Hypothesen entwickeln und zeigen, dass sie entweder Unmögliches ergeben, oder die Hypothese des rechten Winkels. Saccheri geht äusserst vorsichtig zu Werke. Er warnt davor, Schlüsse über das Unendlich-ferne zu ziehen, er zieht die Möglichkeit asymptotischer Geraden heran und entwickelt ~~als~~ Konsequenzen seiner Hypothesen eine Reihe „nichteuklidischer" Eigenschaften. Schliesslich widerlegt er die Hypothese des stumpfen Winkels mit Hilfe der Unendlichkeit der Geraden! Beim spitzen Winkel gelingt es ihm jedoch nur „nach hartem Kampfe" – wie er selbst sagt – und zwar dadurch, dass er eine Eigenschaft des Lotes im unendlich fernen Punkt herleitet die ihm mit der Natur der Geraden unvereinbar ~~zu~~ zu sein scheint.

Lambert.

Aus der nun folgenden Reihe von deutschen und französischen Geometern möchte ich nur noch Joh. Heinr. Lambert erwähnen, der sich eines ganz ähnlichen Gedankenganges bedient wie Saccheri. Er untersucht sogar schon die Geometrie auf der Kugel, gelangt dabei viel weiter als Saccherie und wagt sich sogar an imaginäre Radien! Lambert starb 1777 – im gleichen Jahre wurde Gauss geboren. Mit Lambert endet die Geschichte 2.000-jährigen Strebens das berüchtigte Postulat zu beweisen.

Nicht-Euklidisch!

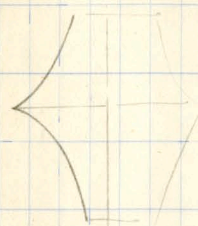
Perpetuum mobile, Quadratur des Zirkels und Parallelenaxiom standen ungefähr im selben Rufe. Nicht einmal Gauss hat es gewagt seine

Untersuchungen aus diesem Gebiet zu veröffentlichen. Er fürchtete das „Geschrei der Böoter" – wie er bekanntlich einmal schrieb. Erst aus seinem Nachlasse wurde bekannt, dass ihm die Entwicklung einer „antieuklidischen" Geometrie gelungen war, die einfach absah von dem Stein des Anstosses – und die trotzdem widerspruchsfrei war. Die an die Namen von Gauss, Bolyai, Lobatschefski geknüpften Untersuchungen bedeuten etwas prinzipiell Neues. Die Probleme der Geometrie werden von einem bedeutend allgemeineren Standpunkt aus betrachtet. Das 5. Postulat führt mit Recht diesen Namen. Es bildet einfach das Kennzeichen einer bestimmten möglichen Geometrie. Diese Erkenntnis ist wichtig; ich möchte aber noch ein anderes Ergebnis betonen: man darf die Verhältnisse im unendlich Fernen nicht einfach aus denen im Endlichen herleiten!

Nahegeometrie

Wir berühren damit einen Gedankenkreis der seine bewusste Durchbildung auch wieder von Gauss erhalten hat: es ist die differentialgeometrische Behandlung der Geometrie. Das Ergebnis dieser, zweckmässig „nahegeometrisch" zu nennenden Richtung ist die Erkenntnis, dass Kurvenlänge, Winkel, Flächengrösse u.s. ~~un~~abhängig sind von einer quadratischen Differentialform ds^2 für das Linienelement. Bei der Untersuchungen der Fläche sind nur die Verhältnisse in der infinitesimalen Umgebung jedes Punktes massgebend. Von fundamentaler Bedeutung ist der Begriff der Krümmung. Euklidische und speziell nichteuklidische Geometrien lassen sich unter viel allgemeinere Gesichtspunkte bringen. Der „Hypothese des stumpfen Winkels" entspricht die Geometrie auf einer Fläche konstanter positiver Krümmung. Sie ist abwickelbar* auf eine Kugel. Der euklidischen Geometrie entspricht konstante Krümmung 0, d.h. Abwickelbarkeit auf der Ebene. Schliesslich gehören Geometrie auf der Umdrehungsfläche

*besser: verbiegbar!



der Traktrix, und Hypothese des spitzen Winkels zusammen. Bei diesen Zuordnungen entsprechen sich Gerade und geodätische Linien, nur mit der Unendlichkeit der Geraden ~~ist~~ hat es ein Ende – sonst wäre ja auch Saccheri nie zum Ziel gekommen.

Riemann.

Die konsequente Weiterführung dieser Ideen auf dem Wege des „Nahe"-Prinzips leistet Bernhard Riemann. Die Untersuchung des Raumes ist für ihn nur ein Sonderfall aus der Betrachtung stetiger n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Ich möchte in aller Kürze einen Überblick zu geben versuchen über den Inhalt seiner berühmten Göttinger Habilitationsschrift „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen".

Der 1. Teil enthält die Entwicklung des Begriffes einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Das Resultat ist die Möglichkeit eine solche stetige Mannigfaltigkeit auf ein System von n-Koordinaten zu beziehen. Es handelt sich nun darum – dies fällt in den 2. Teil – jene Verhältnisse zu untersuchen, die durch Messen in ihr selbst festgestellt werden können, z.B. ihre Krümmung – wenn nur ein Gesetz gegeben ist nach dem „Längen" bestimmt werden können. Man arbeitet nun insoferne der Anwendung auf den vorliegenden 3-dimensionalen Anschauungsraum vor, als man einen Ausdruck ds^2 als Fundamentalform annimmt, der eine Verallgemeinerung des Pythagoräisch-Euklidischen Lehrsatzes darstellt: $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Dies besagt: Haben zwei unendlich benachbarte Punkte die relativen Koordinaten $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, so nenne ich jene Form ds^2 die „Länge" die man nach der Formel berechnet: $ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + \ldots g_{nn} dx_n^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + . g_{n-1\,n} dx_{n-1} dx_n$

Damit ist das Gesetz für das Messen in der Mannigfaltigkeit gegeben, ds^2 heisst mit Recht die Fundamentalform. Kenne ich für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit die g_{ik} so kann ich auch sein zugehöriges

Linienelement berechnen. Diese Entwicklungen stützen sich ganz auf den Gedanken der Differentialgeometrie: massgebend sind nur die Verhältnisse im unendlich-Kleinen. Zwei Annahmen sind für diese Riemann'sche Geometrie wesentlich: 1.) die Mannigfaltigkeit ist eine stetige und 2.) „dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei" d. h. dass jede Länge durch jede ~~messbar~~ sei.
Die bisher besprochenen Fragen gehören ganz allgemein der Lehre von den Mannigfaltigkeiten an, sind also unabhängig von der besonderen 3 dimensionalen Geometrie, die sie als Sonderfall enthalten. Es entsteht nun die Frage die sich auch schon bei Gauss gezeigt hatte, als er die Gleichberechtigung euklidischer und nichteuklidischer Geometrieen erkannte: An und für sich ist keine Mannigfaltigkeit vor der andern ausgezeichnet. Woran liegt es, was ist die Ursache, dass gerade die bestimmte Mannigfaltigkeit ausgezeichnet ist, in der sich tatsächlich das Geschehen abspielt? Warum hat sie gerade die vorliegende Dimensionszahl? Warum ist sie mit einem sicher hohen Grad der Genauigkeit euklidisch-eben? Mit diesen Fragen stehen wir an einer Stelle die an das ganz zu Anfang Gesagte anschliesst: Die Geometrie hat die Grenzen erreicht die ihr durch die zu Grunde liegende Idealisierung gezogen sind. Solche Fragen sind nur mehr durch die Erfahrung zu lösen. Riemann hat das klar ausgesprochen: „Der Grund der Massverhältnisse muss ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden."

Es ist nun klar: die Physik muss ~~nun~~ dort weiterbauen, wo es der Geometrie nicht mehr möglich ist. Einer solchen Aufgabe kann aber nur eine solche Physik gewachsen sein, die im Stande ist, auf die infinitesimalen Verhältnisse der vorliegenden Mannigfaltigkeit einzugehen.

Physik.
Fernkräfte

Wir betreten ein neues Gebiet: die Physik. Ihre Geschichte zeigt ein ganz anderes Aussehen, als die Geschichte der Geometrie: Ein Werk hoher Vollendung konnte an den Ausgangspunkt unserer geometrischen Betrachtungen gestellt werden. Durch Euklid war eine wirkliche Wissenschaft begründet worden. Ganz anders die Physik: sie kennt keinen Euklid – kann ihn auch nicht kennen. Das ist nur zu verständlich: eine Eigenschaft der Wirklichkeit untersucht die Geometrie: ihr Ausgangspunkt ist die Gestalt. Unendlich bleibt das Gebiet der Physik. Man kann nur staunen über die Kühnheit einzelner griechischer Denker die es trotzdem unternahmen alles in ein System zu bannen!

Die Physik bedarf einer neuen Arbeitsmethode. Es ist von vorne herein aussichtslos sofort nach dem Warum? einer Erscheinung zu fragen. Über das Wie? muss man sich vorerst im Klaren sein. Spät wurde dieser Weg beschritten. Erst seit Galilei – also seit dem 16. Jahrhundert – können wir die Physik, in unserem Sinne, zur Wissenschaft zählen. Diese Auffassung zeigt sich klar in dem Wahlspruch Newtons: „hypotheses non fingo".

Die Physik des 18. Jahrhunderts ist fast identisch mit Mechanik. Der ungeheure Erfolg der Newton'schen Lehre hat bewirkt, dass man es als letztes Ziel aller Physik auffassen konnte jedes Phänomen auf die Mechanik gravitierender Massen zurückzuführen. Damit ist die Fernkraft der Gravitation als fundamentale Naturkraft eingeführt, – eine Vorstellung gegen die schon Leibniz eingewandt hatte, dass nur Differentialgesetze als oberste Gesetze angesehen werden könnten. Die Begründung der analytischen Mechanik durch Lagrange und Euler bedeutet eigentlich keine prinzipielle Änderung in den Fernvorstellungen.

Grundsätzlich anders sind dagegen die *Faraday-Maxwell'schen* Vorstellungen von den elektromagnetischen Erscheinungen. Die Wirkungen von Ladungen und Strömen aufeinander *nicht* als Fernkräfte aufzufassen sondern auf die Vorgänge im Zwischenmedium – im *Feld* – zurückzuführen, bedeutet die Einführung einer strengen *Nahewirkungstheorie* in die Physik. Die *Maxwell'schen* Gleichungen sind der vollendete Ausdruck dieser Ideen. Aus einer grossen Zahl unübersichtlicher Integralgesetze ist *ein* einfaches Gleichungssystem entstanden, das die Verhältnisse an einem bestimmten Raum-Zeitpunkt des Feldes in Beziehung setzt zu den Zuständen im unendlich benachbarten. Wenn auch Maxwell selbst von dem Streben nach einem *mechanischen Modell* der Feldvorgänge geleitet wurde, so hat sich doch bald diese Stellung von Mechanik und Elektrizitätstheorie umgekehrt. Von nun an tritt wieder das *Nahewirkungsprinzip* voll in den Vordergrund.

Nahewirkung

Faraday, *Maxwell*

Es wäre nun folgerichtig in der Besprechung der Entwicklung der *Feld*vorstellungen weiterzugehen, wie sie uns in der Mie'schen Theorie entgegentritt. Dazu ist es aber nötig auf den Anteil einzugehen den wir der *speziellen Relativitätstheorie* für die Entwicklung unserer Grundgedanken zumessen müssen. Sie ist ihrer Entstehung nach ein Ergebnis experimenteller Untersuchungen die sich nicht in den Rahmen bisheriger Anschauungen einordnen liessen. Die wichtigste gedankliche Stütze findet sie in der Durchführung des Postulates der Relativität und der dadurch erzielten Vereinheitlichung von mechanischen und elektrischen Vorgängen. Diese Forderung der Invarianz gegen bestimmte Transformationen bildet bekanntlichen den wichtigen *Ausgangspunkt* der späteren Theorien. Für das Problem

Spezielle R.T.

unserer Mannigfaltigkeit liefert sie die fundamentale Einsicht, dass wir es mit einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit zu tun haben, wenn wir die Erscheinungen mathematisch beschreiben wollen.

Mie Feld und Materie

Die aus dem Boden der speziellen R.T. erwachsene Mie'sche Theorie ist in mehrfacher Hinsicht von grossem Interesse. Zunächst als Weiterentwicklung der Feldvorstellungen. Diese Ideen dienen aber zur Behandlung eines eigentlichen neuen Problems der Physik: es ist das Problem der Materie.

Noch Maxwell stand auf dem Boden eines strengen Dualismus zwischen Feld und Materie. Seine Körper sind Fremdkörper im Felde – wie Bleistücke in einem Gummiwürfel – sie sind Träger der Ladungen an denen das Feld angreift, die Körper hin und her schiebend. Die Maxwell'sche Feldphysik ist allerdings eine Kontinuums-Physik, aber dieses Feld ist scharf begrenzt von den Körpern. Diese Anschauungen finden wohl bald ihr Ende durch die Lehren der Elektronen- und Atomtheorien. Wenn man in den Elektronen die letzten Bausteine der Atome erkennen will, so ist es klar, dass zumindest der Unterschied zwischen Elektrizität und Substanz der Körper hinfällig wird. Mie geht hier weiter. Für ihn sind auch Elektron und Feld nicht von Grund aus wesensverschieden. Es entsteht allerdings jetzt das „Problem der Materie": Wie ist es möglich, dass sich solche „Knotenstellen" des Feldes erhalten können? Und weiter: Woher kommt der Unterschied von positiver und negativer Elektrizität? Dieser Entwicklung hat die spezielle R.T. schon vorgearbeitet indem sie zu einer Identifizierung von Masse und Energie geführt hat. Diffuse Feldenergie und Stellen besonderer Anhäufung von Energie sind also nicht mehr grundsätzlich verschieden. Es entspricht dem ~~Grund~~ Grundgedanken der Mie'schen Theorie die vier Feldvektoren

$\mathfrak{f}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J}$ sowie die beiden Potentiale — skalares φ und Vektorpotential $\mathfrak{f}$ — nicht mehr als blosse Rechengrössen anzusehen. Diese Auffassung wird ergänzt durch die Grundannahme der Theorie, dass auch im *Innern* der Elektronen ein Feld bestehen müsse.
Im Sinne dieser Auffassung wird z. B. die Frage, wie sich eine solche „Knotenstelle" des Feldes, genannt „Elektron", erhalten könne, für den statischen Fall sehr anschaulich gelöst. Es gilt dann bekanntlich die Gleichung: $\mathfrak{f} + \nabla\varphi = 0$ Die Kraft $\mathfrak{f}$ bedeutet die *Expansivkraft* der Materie, sie sucht die angehäufte Ladung über das Feld hin zu verteilen. $\nabla\varphi$ bedeutet dann die *Kohäsionskraft* des Feldes.[x] In formeller Hinsicht hat die Mie'sche Theorie noch ein wichtiges Ergebnis gezeitigt: Die Einführung des *Hamilton'schen Prinzips*. Es gelingt ihr die Feldgesetze aus der Forderung abzuleiten, dass die Variation eines Integrals erstreckt über eine Funktion der Feldgrössen Null sei. Diese fundamentale Funktion ist die berühmte „*Wirkungsfunktion*": Sie muss so beschaffen sein, dass sie von der Verschiedenheit der Ladung Rechenschaft abgeben kann.

[x] Im statischen Fall müssen sich beide Kräfte aufheben, d. h.: $\mathfrak{f} + \nabla\varphi = 0$!

Allgemeine R.T.

Gravitation

Wir stehen am Ende unserer physikalischen Betrachtungen und wollen nun das auszuwerten versuchen, was sie uns gelehrt haben. Eine reine *Feld*physik, eine Physik des Kontinuums, der *Nahe*wirkung, war das Ergebnis der Faraday-Maxwell'schen Ideen. Jedem Punkt unserer vierdimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit sind Zustandsgrössen zuzuordnen, ihre Änderung, ihre gegenseitige Beeinflussung, ist das was in der mannigfaltigsten Art in Erscheinung tritt. Nur *ein* Punkt stört dieses Bild: Die fundamentale Erscheinung der Gravitation will sich nicht in dieses Bild einordnen lassen: sie bleibt eine *Fern*kraft, d. h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswirkung ist ∞! Und daneben steht noch eine ganz andere Frage: Warum ist die vorliegende Mannigfaltigkeit

-12.-

gerade 4-dimensional und warum ist die vorliegende Metrik gerade diese und keine beliebige andere? Die „allgemeine Relativitätstheorie" wies den Weg beide Probleme, Gravitation und Metrik, zugleich zu lösen. Der Grundgedanke dafür ist der folgende: Die Metrik einer beliebigen Mannigfaltigkeit, d. h. das metrische Feld, bedarf eines Gesetzes von Aussen, nach dem jedem Punkt der Mannigfaltigkeit – stetig von Punkt zu Punkt veränderlich – ein bestimmter Wert jener Grössen g_{ik} zugeordnet wird, die für das Messen in diesem Punkte grundlegend sind. Das Resultat ist eben das „metrische Feld". Das tatsächlich vorliegende metrische Feld kann aber sein „von Aussen" kommendes Gesetz auch nur in den tatsächlichen Grössen der realen Welt sehen – die nichts weiss von einer Trennung in Geometrie und Physik. Das aber, was den physikalischen Teil der „Welt" am sichersten charakterisiert, ist die Verteilung der Massen – und wir können schon sagen der Energie – in ihr. Genau so wie die Feldgrössen der Elektrodynamik bedingt sind von den Ladungen im Felde, so bestimmt die Masse das Feld der Metrik. Damit ist jene Metrik als tatsächlich vorhanden bestimmt, die der tatsächlichen Energieverteilung entspricht. Wir können aber die Analogie mit der Elektrodynamik noch weiter führen. Die Verteilung der Elektronen wirkt nicht nur auf das Feld, das Feld wirkt auch seinerseits auf die Elektronen zurück. Und gerade diese Wirkung des metrischen Feldes auf die Massen ist das was wir als Gravitation zu bezeichnen haben!

Relativität. Damit löst sich noch ein drittes Problem von dem – historisch – die ganze Theorie ihren Ausgang genommen hat – und leider auch ihren Namen: Das Postulat der allgemeinen Relativität aller Bewegungen. Ich erinnere an das berühmte Newton'sche Argument für ~~den~~ den absoluten Charakter der Rotation: Das rotierende Wasserglas. Mach hat bekanntlich dieses Argument schon widerlegt, indem er darauf hinwies, dass man vor einer endgültigen Entscheidung erst wissen müsse wie die Rotation der ganzen Umwelt auf das Wasser wirke! Hermann Weyl hat hier einen anschaulichen Begriff geprägt: er spricht von einem „Führungsfeld." Durch die Metrik einer Mannigfaltigkeit – also durch die Massenverteilung – ist eine bestimmte Bahn vorgezeichnet, der ein Körper folgen muss. Das ist der Sinn des Trägheitsgesetzes – modifiziert durch den Übergang von der „geraden" zur „geodätischen Linie". Die Reaktion ~~[illegible]~~ dieses Führungsfeldes gegen ablenkende Kräfte äussert sich als Zentrifugalkraft. Die Ursache der Zentrifugalkraft ist also die Rotation relativ zu den die Metrik – das „Führungsfeld" – bestimmenden Massen. Einstein hat diese Gedanken in der Form eines Prinzips formuliert; er nennt es das „Mach'sche Prinzip": „Das Gravitationsfeld ist restlos durch die Massen bestimmt." Annalen d. Physik. 55. 1918

Ich möchte das Gebiet der allgemeinen Relativitätstheorie nicht verlassen ohne zu versuchen an Hand einiger Formeln die Verbindungen etwas auszuführen deren allgemeinsten Grundgedanken ich soeben entwickelt habe. Obwohl ich dabei etwas vom direkten Wege unserer Untersuchungen abgehe, halte ich dieses Unternehmen doch nicht für nutzlos. Erstens möchte ich nämlich doch in einigen Strichen etwas von dem Reichtum der Beziehungen und Gesetzmässigkeiten aufdecken die in dieser Theorie enthalten sind. Und zweitens glaube ich, dass auch im Hinblick auf die Weyl'schen Untersuchungen tun zu dürfen. Dort wird uns ein viel schwierigerer Formelapparat entgegentreten der noch längst nicht so durchforscht ist wie der, der allgemeinen R.T. Die Probleme und Einzelheiten

Beziehungen bleiben aber im Wesentlichen dieselben. Es ist also wohl einfacher diese Dinge schon hier übersichtlicher zusammenzustellen.

Tabelle I.

⟨ Allgemeiner Plan zur Besprechung der Formeln. ⟩

Bezeichnungsweisen. Die vorausgesetzten Grundformeln.
Aufstellung der Substanz- und Feldwirkungen. Ihre Rechtfertigung.
Hamilton'sches Prinzip als Postulat: Seine heuristische Kraft.
Die Variationen: 1.) $\delta \varphi_i$ Maxwell II. Spannungen, Energie-Impuls-Dichte des elektromagnetischen Feldes. Komponentenbedeutung in der speziellen R.T. Kraftformel
2.) δx_i Kraftformel der Mechanik
3.) δg_{ik} Fundamental für die allgemeine R.T. Der Energie-Impuls-Tensor. Gravitierende Wirkung aller Energie. Einsteins „Äquivalenzprinzip": „Trägheit und Schwere sind wesensgleich.
Die Gravitationsgleichungen
Daraus folgt: Kenntnis der g_{ik} verleiht Metrik und Physik erst Leben. Metrik: ds^2 Krümmung Kriterium der Euklidizität. Das Ziel der Riemann'schen Ideen ist erreicht.
Mechanik. Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssätze. Energiedichte des Gravitationsfeldes.

Zusammenfassung

Eine Fülle der wichtigsten Zusammenhänge ergibt sich als Konsequenz der allgemeinen R.T. Es sind bei weitem nicht alle, und – man soll es auch nicht verschweigen – in manchem Punkt ist noch nicht das letzte Wort gesprochen.
Noch einmal möchte ich betonen: Die A.R.T. hat die Ideen Riemanns zur Verwirklichung geführt. Es ist ihr gelungen Geometrie und Physik zu einem nunmehr untrennbaren

Tabelle **I.**

$$g^{ik} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} \qquad g = \mathrm{Det.}\,|g_{ik}| \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Deutsche Grössen $= \sqrt{g}\,.$ latein. Grösse

$$\mathfrak{m} = \sqrt{g}\,.\,\mu_0$$

$$d\omega = \sqrt{g}\; dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{ik,r}} = \frac{1}{2}\mathfrak{H}^{ik,r} \qquad g_{ik,r} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}$$

$$\varphi^0 = \varphi \qquad \varphi^{1,2,3} = f_{x,y,z}$$

$$s^0 = \rho \qquad s^{1,2,3} = \sigma_{x,y,z} \qquad \underline{\sigma^i = \rho u^i}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik} \\ &\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \equiv 0 \end{aligned}} \quad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathfrak{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{L} = 0 \end{cases}$$

$$(F_{10}\, F_{20}\, F_{30}) = \mathfrak{f} \qquad (F_{23}\, F_{31}\, F_{12}) = \mathfrak{L}$$

$$\underline{\mathfrak{k}_i = F_{ik}\sigma^k}$$

$$u^i = \frac{dx_i}{ds} \qquad u^i \mathfrak{k}_i = 0$$

$$dm = v\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

$$\int \underline{dm\, ds} = \int v\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, ds = \int v\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \Delta =$$

$$= \int \frac{v\Delta}{\sqrt{g}}\, d\omega = \int \mu_0\, d\omega = \int \mathfrak{m}\, dx$$ Substanz

$$\int \mathfrak{H}\, ds$$ Feld

$$de = \varepsilon\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

$$\int de \int \varphi_i\, dx_i = \int s^i \varphi_i\, d\omega$$ Substanz

$$\frac{1}{4}\int F_{ik}F^{ik}\, d\omega$$ Feld

$$\boxed{\delta \int \left(\mathfrak{m} + \sigma^i \varphi_i + \frac{1}{4}F_{ik}\mathfrak{f}^{ik} + \mathfrak{H}\right) dx = 0}$$

$\delta\varphi_i$

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \sigma^i}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{L} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \sigma \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{f} = \rho$$

$$\mathfrak{t}_i^k = \frac{1}{4}F_{ik}\mathfrak{f}^{ik}\delta_i^k - F_{ir}\mathfrak{f}^{kr}$$

$$\mathfrak{k}_i = \frac{\partial \mathfrak{t}_i^k}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \mathfrak{t}_\beta^\alpha$$

δg_{ik}

$$\int \left(\frac{1}{2}\mathfrak{m} u^i u^k + \frac{1}{2}\mathfrak{t}^{ik} + \frac{1}{2}[\mathfrak{H}]^{ik}\right)\delta g_{ik}\, dx = 0$$

$$\underline{\mathfrak{m} u^i u^k + \mathfrak{t}^{ik} = \mathfrak{T}^{ik}}$$

$$\underline{\mathfrak{T}^{ik} = -[\mathfrak{H}]^{ik}}$$

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx = \int \frac{1}{2}[\mathfrak{H}]^{ik}\delta g_{ik}\, dx = \int \delta \frac{1}{2}R\sqrt{g}\, dx$$

$$[\mathfrak{H}]_{ik} = \frac{1}{2}g_{ik}R - R_{ik}$$

$$\boxed{R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \mathfrak{T}_i^k}$$

δx_i

$$F_{ik}\sigma^k = \mathfrak{k}_i = \mathfrak{m}\left(\frac{du_i}{ds} - \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} u^\alpha u_\beta\right)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{\partial [\mathfrak{H}]_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}[\mathfrak{H}]^{\alpha\beta} = 0$$

$$\mathfrak{m}\left(\frac{du_i}{ds} - \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} u^\alpha u_\beta\right) +$$

$$+ u_i \frac{\partial(\mathfrak{m} u^i)}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\partial \mathfrak{t}_i^k}{dx_k} - \begin{Bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{Bmatrix}\mathfrak{t}_\beta^\alpha = 0$$

$$\underline{\frac{\partial(\mathfrak{m} u^i)}{\partial x_i} = 0}$$

$$\underline{ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k}$$

$$R_i^i = R \qquad R_{i\alpha k}^\alpha = R_{ik}$$

$$\underline{R_{klm}^i = \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} km \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} sm \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} kl \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ls \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} km \\ s \end{Bmatrix}}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{Bmatrix} = g^{is}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_s}\right)$$

$$\mathfrak{A}_i^k = \mathfrak{H}\delta_i^k - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^{\alpha\beta,k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_i^k}{\partial x_k} = \frac{1}{2}[\mathfrak{H}]^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{A}_i^k + \mathfrak{T}_i^k\right) = \underline{\frac{\partial \mathfrak{M}_i^k}{\partial x_k} = 0}$$

Zu Seite 14.

Ganzen zu verschmelzen. Dieselben g_{ik}, die das Messen in der Mannigfaltigkeit bestimmen, sind die „Potentiale" des Gravitationsfeldes. Und auch die andere Frage Riemanns ist gelöst: Wie zeichnet sich gerade die in der Welt vorliegende Mannigfaltigkeit vor jeder andern ebensogut möglichen aus? Antwort: Es ist jene in der die „Wirkungsgröße" ihren extremalen Wert hat:

$$\underline{\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{G})\, dx = 0}$$

Doch wir sind noch nicht am Ende! So folgerichtig die Entwicklung zu sein schien, die von Physik und Geometrie im Geiste der Nahewirkung zur schliesslichen Verschmelzung beider Gebiete führte – eine Ausnahme gibt es doch, die – zumindest mathematisch – mit dem Prinzipe strenger „Nahegeometrie" nicht verträglich ist. Riemann hat nämlich angenommen, dass in einer metrischen Mannigfaltigkeit jede Länge mit jeder andern vergleichbar sei. Dies soll folgendes bedeuten: Im Punkte P einer Mannigfaltigkeit ist das Quadrat des Linienelementes ds^2 proportional der Bilinearform $g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, also gegeben durch einen Ausdruck $ds^2|_P = \alpha\, g_{ik}|_P\, dx_i\, dx_k$. In einem andern Punkte P' der von P beliebig entfernt liegen mag haben die g_{ik} einen bestimmten Wert: $g_{ik}|_{P'}$. Dann lautet nach Riemann das Linienelement in P': $ds^2|_{P'} = \alpha\, g_{ik}|_{P'}\, dx_i'\, dx_k'$. Der Proportionalitätsfaktor α ist eine universelle Konstante! Diese Annahme liegt noch der allgemeinen R.T. zu Grunde. Die Masseinheit kann dann noch für die ganze Mannigfaltigkeit so gewählt werden, dass $\alpha = 1$ ist: das ergibt dann die gewöhnlichen Ausdrücke mit denen immer gerechnet wird.

Weyl

In diesem Punkte setzen nun die Ideeen Hermann Weyl's ein, die ihn zu einer „reinen Infinitesimalgeometrie" führen. Für ihn ist ein Vergleichen von Längen auch nur in einer infinitesimalen Umgebung gestattet. Lautet das Linienelement in P: $ds^2|_P = 1 \cdot g_{ik}|_P \, dx_i dx_k$ so lautet es im unendlich benachbarten Punkt P^x: $ds^2|_{P^x} = (1+d\varphi)\, g_{ik}|_{P^x} \, dx_i' dx_k'$. Die $d\varphi$ sind ebenso stetig in der Mannigfaltigkeit veränderlich wie die g_{ik}. Sie sollen eine Linearform der Differentiale sein: $d\varphi = \sum_i \varphi_i dx_i$. Damit eine Mannigfaltigkeit im strengem Weyl'schen Sinne eine „metrische" sei, muss nicht nur ein Feld der g_{ik} definiert sein, sondern auch eines der φ_i. D. h. auch ein Gesetz der Längenübertragung muss gegeben sein.

Und ebenso wie in der allgemeinen RT die g_{ik} einerseits Metrik, andrerseits Gravitation definieren, so auch hier: Die φ_i legen die Längenübertragung in der Mannigfaltigkeit fest und haben gleichzeitig – das ist das physikalisch Neue bei Weyl – die Bedeutung der Potentiale des elektromagnetischen Feldes. Aus den metrischen Eigenschaften der „Welt" folgen die beiden Grundphänomene: Gravitation und Elektromagnetisches Feld – oder umgekehrt! Physik und Geometrie sind nur aus einem Prinzip zu verstehen – und im unendlich Kleinen!

Idealisierung ≡ Grenzen

Geometrie

Gerade unendlich

Riemann: Diff. Geom.

Beh.: 1.) Stetigkeit, 2.) Länge unabh. v. der Lage.

Warum: diese Mannigfaltigkeit?

$n = 4$?

Physik

Fernwirkung

Nahewirkung.

Gravitation?

A.R.T

Metrik ≡ Gravitation

$$\delta \int (\mathcal{L} + \mathfrak{G})\, dx = 0$$

Beh.: 1.) Stetigkeit

2.) Länge

Elektrizität?

Weyl.

Zu den Seiten 1 bis 16.

2. Teil.

Die Weyl'sche Theorie.

Einleitung.

Nachdem ich versucht habe die leitenden Gedanken zu kennzeichnen als deren schliessliches Ergebnis Riemann'sche Geometrie, allgemeine Relativitätstheorie und endlich Weyl'sche Physik anzusehen sind, ist es jetzt unsere Aufgabe im Einzelnen auf die Weyl'schen Ideen einzugehen.

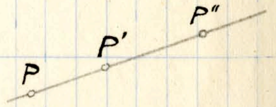
Schon aus unseren allgemeinen Betrachtungen wissen wir, dass Weyl nicht direkt an Einsteins allgemein R.T. angeknüpft hat sondern auf die geometrischen Fundamente dieser Theorie zurückgegangen ist. Wir wollen also fürs Erste die Einsteinschen Überlegungen einfach als nicht vorhanden annehmen. Nur den Grundgedanken wollen wir beibehalten, dass zwischen den geometrischen und physikalischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit ein untrennbarer Zusammenhang besteht. Der *erste* Gegenstand unserer Betrachtungen wird also die Ausdehnungslehre sein – die Lehre von der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. *Dann* stehen wir wieder vor der Aufgabe aus dieser *Mannigfaltigkeit* eine „*Welt*" zu machen, d.h. den Zusammenhang mit der Physik herzustellen.

Erlanger Programm.

Wir suchen zunächst nach einem Rahmen in den sich unsere geometrischen Überlegungen einordnen lassen. Besitzen wir dann ein festes Gefüge in das jedes speziellere Problem einordnet, so wird es ein Leichtes sein gerade jene Züge herauszufinden die physikalisch bedeutsam sind.

Der Gruppenbegriff

Ein solches ganz allgemeines Einteilungsprinzips hat Felix Klein in seinem berühmten „*Erlanger Programm*" gegeben. Wir wollen uns an dieses halten, müssen aber zuvor einen wichtigen Hilfsbegriff einführen: den Begriff der *Transformationsgruppe*.



Ein ganz einfaches Beispiel: Ich verschiebe einen Punkt P auf einer Geraden nach P'. Dann weiter nach P''. Das hätte ich auch auf einmal machen können: gleich von P nach P''. Analytisch sieht das so aus:

$$PP' \qquad x' = x + a \qquad (1.)$$

$$P'P'' \qquad x'' = x' + b \qquad (2.)$$

$$\text{oder } PP'' \qquad \underline{x''} = (x+a) + b = x + (a+b) = \underline{x + c} \qquad (3.)$$

Ergebnis: der Charakter der Transformation (3.) ist dieselbe wie der von (1.) oder (2.). Man sagt diese Transformationen bilden eine „<u>Gruppe</u>". Das führt zur allgemeinen Definition: „Eine Schar von Transformationen zwischen x und x' heisst eine <u>Transformationsgruppe</u>, wenn je zwei Transformationen der Schar nach einander ausgeführt eine Transformation ergeben, welche wieder der Schar angehört."

<u>Die Hauptgruppe.</u> Dieser wichtige Gruppenbegriff liegt nun dem Erlanger Programm zu Grunde. Wir stellen uns nun zunächst für einen Augenblick auf den Boden der elementaren euklidischen Geometrie. Dann bezeichnen wir in einem naheliegenden Sinne jene Eigenschaften eines Gebildes – einer Figur – als „<u>elementargeometrische</u>" die unabhängig sind 1.) von der Lage im Raum, 2.) vom Umlaufsinne und 3.) von der absoluten Grösse. Wir nehmen z. B. ein gleichschenkliges Dreieck. Elementargeometrisch sind dann jene Eigenschaften die bei einer <u>Verschiebung</u>, <u>Spiegelung</u> und schliesslichen Vergrösserung der Seiten erhalten bleiben. Dies formulieren wir nun etwas allgemeiner: Eine, in diesem Sinne, geometrische Eigenschaft, muss invariant sein, gegenüber Bewegung oder Spiegelung des Raumes und gegen Ähnlichkeitstransformationen, – bzw. gegenüber allen Transformationen welche sich aus diesen dreien zusammensetzen. Klein nennt nun die <u>Gruppe</u> dieser Transformationen die „<u>Hauptgruppe</u> <u>räumlicher Änderungen</u>". Man kann dann unsere Definition so fassen: „(elementar-)geometrische Eigenschaften sind solche die durch Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert werden". Oder mit andern Worten: „<u>Elementargeometrie</u> <u>ist die</u> <u>Invariantentheorie</u> <u>der</u> <u>Hauptgruppe</u>."

Allgemeine Fassung.

Wir übertragen diese Gedanken auf die Untersuchung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Wir gelangen damit zu jener Formulierung die Klein dem allgemeinsten Problem der Geometrie gegeben hat:
„Gegeben eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und irgend eine Transformationsgruppe. Es sind die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich derjenigen Eigenschaften zu untersuchen die bei Transformationen der vorgelegten Gruppe ungeändert bleiben." Oder:
„Gegeben eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und eine Transformationsgruppe. Es ist die Invariantentheorie dieser Gruppe aufzustellen."
Wir haben damit einen sehr allgemeinen Standpunkt erreicht, dem sich die ganze geometrische Forschung im engeren Sinne unterordnet. Hier wollen wir in dem Sinne daraus Nutzen ziehen, dass uns ein Mittel an die Hand gegeben ist, die Geometrie so zu behandeln dass sie der physikalischen Betrachtung zugänglich wird.

Analysis situs.

Wir versuchen gleich eine Anwendung zu machen. Wir legen unserer „Geometrie" oder hier vielleicht besser gesagt – unserer Lehre von der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit – eine sehr allgemeine Gruppe zu Grunde: die Gruppe der reellen, eineindeutig stetigen Punkttransformationen. Invariant gegen solche Transformationen sind die Eigenschaften aller jener Gebilde die durch Biegung oder Dehnung <u>ohne</u> Zerreissen in einander übergeführt werden können. Es ist dies das Gebiet der „<u>analysis situs</u>." Dimensionszahl, Geschlossenheit, Zusammenhang sind z. B. solche analysis situs-Eigenschaften. Von einer Massbestimmung, ja einer Richtungsauszeichnung ist in einer solchen Mannigfaltigkeit noch keine Rede. In Betracht kommen nur jene Gesetze die im <u>Begriff</u> der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit allein liegen. Wir legen uns nun die Frage vor: Wie ist eine solche Mannigfaltigkeit ohne Metrik, ohne ein Gesetz für bestimmte Verschiebungen in ihr, tatsächlich realisierbar? Einem solchen Falle kann nur eine absolut leere Welt entsprechen – ohne irgend welcher Energieverteilung. Man könnte also eigentlich sagen: keine Welt. Wir sehen also: wollen wir zu Gesetzmässigkeiten kommen wie sie sich in Gravitation, Trägheit, Elektrodynamik äussern, so müssen wir zu viel spezielleren Fällen übergehen.

Affiner Zusammenhang.

Allgemeiner Plan.

Wir werden folglich versuchen uns eine solche Mannigfaltigkeit zu konstruieren, dass in ihr physikalische Gesetzmässigkeit im allgemeinsten Sinne schon möglich ist: Durch die Verhältnisse in einem Raum-Zeitpunkt der Welt soll der Zustand im unendlich benachbarten Punkt bestimmt sein. Dabei vollziehen wir auch gleichzeitig den richtigen Übergang vom Endlichen zum unendlich Kleinen. Das was wir suchen ist also eine Mannigfaltigkeit die ein „Führungsfeld" zulässt.

Affine Transformation.

Ein solches „Führungsfeld" kennt in gewissem Sinne auch schon die Newton'sche Physik. In einem zulässigen Bezugsraum bewegt sich ein sich selbst überlassener Körper geradlinig gleichförmig. Das Gesetz dieses Führungsfeldes spricht sich also einfach dahin aus, dass der Geschwindigkeitsvektor konstant bleiben soll und zu sich selbst parallel verschoben werden muss. Diese Erinnerung führt darauf den Parallelen-Begriff – in etwas erweitertem Sinne allerdings – unseren Überlegungen zu Grunde zu legen: Als Transformationsgruppe ~~der~~ für unsere Geometrie im unendlich Kleinen werden wir jene Gruppe wählen müssen, die die Parallelität unberührt lässt: Es ist die Gruppe der affinen Transformationen. Mehr wollen wir aber zunächst nicht vorschreiben: vor allem keine Metrik – wir wollen einmal sehen wie weit man mit dem Gesetze der Parallelverschiebung allein kommt. Vom Standpunkt dieser „affinen Geometrie" werden wir also nur drei Kegelschnitte kennen: Hyperbel, Parabel, Ellipse. Dem Kreis, der gleichseitigen Hyperbel kommt keine ausgezeichnete Bedeutung zu. Analytisch sind die affinen Transformationen durch ganze lineare Ausdrücke gekennzeichnet. Hier sieht man auch die Notwendigkeit der Beschränkung auf die Betrachtung des unendlich Kleinen. Würde man nämlich für endliche Transformationen Linearität vorschreiben so würde man damit auf Allgemeinheit einfach verzichten. Für das unendlich Kleine sind die Transformationen aber von selbst linear: $dx_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x'_k} dx'_k$ wobei $x_i = f_i(x'_1 \dots x'_n)$ allerdings nicht mit konstanten Koeffizienten.

Parallelverschiebung

Nach unseren grundlegenden Überlegungen stellen wir an den Begriff der Parallelverschiebung die Forderung: „Die Vektorverpflanzung von P nach P' muss eine affine Abbildung der Vektoren in P auf die Vektoren in P' ergeben." Wenn von jedem Vektor in P feststeht in welchen Vektor er übergeht, wenn man ihn von P nach P' parallel verschiebt so sagt man: zwischen P und P' besteht ein affiner Zusammenhang.

Führungsfeld.

Damit ist eigentlich schon das geleistet, was wir wollten. Dass in einer Mannigfaltigkeit ein affiner Zusammenhang gegeben ist heisst ja, dass ein Gesetz der „Parallelverschiebung" in der soeben beschriebenen Weise vorhanden ist. Das bedeutet physikalisch aber nichts anderes als das Führungsfeld. Die Bahnkurve eines nur dem Führungsfeld folgenden Körpers ist die geodätische Linie, d.h. jene Kurve deren Tangente immer zu sich selbst parallel bleibt. Wir kommen zur Newtonischen Trägheitsbewegung zurück, wenn wir unsere Mannigfaltigkeit euklidisch nehmen.

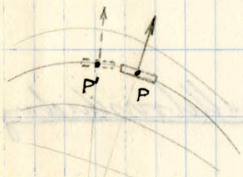
Analytische Formulierung.

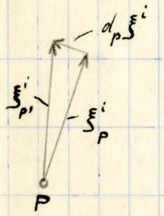
Der Begriff des affinen Zusammenhanges ist ein so wichtiger, dass wir uns noch in aller Kürze mit der mathematischen Formulierung seiner Merkmale beschäftigen müssen. Dabei wird sich die Gelegenheit ergeben von

~~A~~allgemeineren Gesichtspunkten aus auf die allgemeine R.T. zurückzuweisen.

Parallelverschiebung.

Zunächst die Parallelverschiebung: ξ^i seien die Komponenten eines Vektors in P. Wir verschieben ihn nach dem unendlich benachbarten Punkt P' und zwar parallel zu sich. Der Unterschied gegen seine frühere Richtung in P soll mit $d_p \xi^i$ bezeichnet werden, so dass wir in P' den Vektor $\xi^i + d_p \xi^i$ vor uns haben. Es ist wichtig sich über diesen verallgemeinerten Begriff der Parallelverschiebung klar zu werden. Ich will versuchen ~~von~~ diese Verhältnisse in einem (natürlich hinkenden) Vergleich anschaulich zu machen. An einem Eisensplitter befestige ich (z.B. senkrecht) einen Richtungspfeil: den „Vektor". Das ganze bringe ich in irgend ein Magnetfeld. Bewege ich mein Eisenstäbchen nur auf einer Kraftlinie von P nach P' so will ich das immer eine „Parallelverschiebung" ~~[illegible]~~ meines Vektors nennen. Bei einer solchen Verschiebung nach P' kann dann im allgemeinen Falle ~~aber~~ eine Richtungsänderung bezogen auf P eintreten: sie ist das $d_p \xi^i$. Massgebend ist hier immer nur die Richtung – Länge interessiert mich nicht. Sind die Kraftlinien parallele Gerade – oder unsere Mannigfaltigkeit eben – so haben wir die gewöhnlichen Begriffe. Jede andere Verschiebung die nicht in einer Kraftlinie erfolgt ist, dann sehr wohl von einer „parallelen" verschieden.



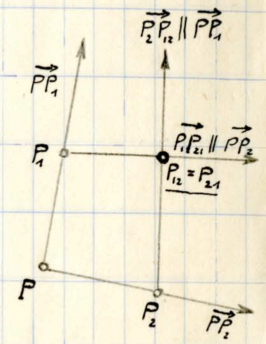


In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit haben wir freilich kein Magnetfeld das einem Vektor eine ausgezeichnete Verschiebung zuordnet. Wohl aber haben wir ein anderes Kriterium der Parallelverschiebung: Die Parallelverschiebung soll eine affine Abbildung der Vektoren in P und P' aufeinander sein. D.h. die $d_p \xi^i$ müssen linear von den ξ^i abhängen:

$$d_p \xi^i = - d\gamma^i_r \, \xi^r$$

$\sum_r$ immer weggelassen.

Die $d\gamma^i_r$ sind von den ξ^i unabhängig. Sind sie für alle Punkte der Mannigfaltigkeit angegeben so kenne ich für jeden Punkt das Gesetz der Parallelverschiebung. Wir haben einen affinen Zusammenhang.



Wir stellen aber noch eine zweite, naheliegende Forderung an das Parallelverschieben in unserer Mannigfaltigkeit: $\overrightarrow{PP_1}$ sei eine Richtung, ein Vektor, durch die unendlich benachbarten Punkte P und P_1. Verschiebe ich diesen Vektor – infinitesimal natürlich – parallel nach P_2, so habe er danach die Richtung P_2P_{12}. Verschiebe ich andrerseits $\overrightarrow{PP_2}$ parallel nach P_1, so soll – das ist meine neue Forderung – die neue Richtung $\overrightarrow{PP_{21}}$ durch P_{12} gehen: $P_{21} \equiv P_{12}$! Das besagt dass die für die Parallelverschiebung charakteristischen Grössen $d\xi_i^r$ symmetrische Funktionen der Koordinatendifferentiale dx_i sein müssen. Man wird also den Ansatz machen:

$$d\xi_r^i = \Gamma_{rs}^i \, dx_s$$

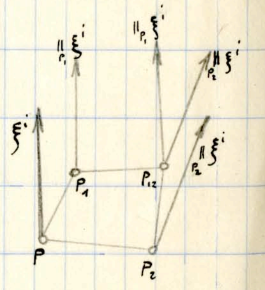
wobei die Koeffizienten Γ symmetrisch sein müssen in r ~~und~~ s:

$$\Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i$$

Diese Γ heissen die „Komponenten des affinen Zusammenhanges." Wir sind damit einen wichtigen Schritt weitergekommen. Ausgehend von einer affinen Abbildung der Vektoren in P auf die in P' die wir dann „parallel" genannt haben, ist es uns gelungen die Abbildung in eine Parallelverschiebung umzudeuten und dadurch einen wirklichen Zusammenhang zwischen den Punkten unserer Mannigfaltigkeit herzustellen. Wir haben ihr damit eine neue Eigenschaft zugeschrieben die die Brücke zwischen mathematischer „Abbildung" und physikalischem „Führungsfeld" zu bilden im Stande ist.

Krümmung.

Bevor wir aber wieder auf die Physik eingehen, wollen wir noch einen wichtigen Begriff definieren, der einer solchen affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit zukommt: die Krümmung. Wir betrachten ein infinitesimales „Parallelogramm" $PP_2P_{12}P_1P$ wie es soeben abgeleitet wurde. Einen Vektor ξ^i in P verschiebe ich zunächst parallel nach P_2 dann nach P_{12}. Ein zweites Mal verschiebe ich ihn über P_1 nach P_{12}. Im allgemeinen Fall sind die beiden in P_{12} derart entstandenen Vektoren nicht identisch. Sie weisen



einen Richtungsunterschied auf der sich einfach durch entsprechende zweimalige Anwendung unserer Parallelverschiebungsformel

(I.) $$\xi^i + d_\rho \xi^i = \xi^i - d\gamma_r^i \xi^r = \xi^i - \Gamma_{rs}^i dx_s \xi^r$$

berechnen lässt: Man findet dann einen Ausdruck

$$R^i_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Gamma^i_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Gamma^i_{\alpha\lambda} + \Gamma^i_{r\lambda}\Gamma^r_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{r\beta}\Gamma^r_{\alpha\lambda}$$

den man als „<u>Krümmungstensor</u>" bezeichnet. Er ist das Mass jener Abweichung, das Mass der <u>Krümmung</u> oder der Abweichung von der Euklidizität unserer Mannigfaltigkeit. Man sieht hier unmittelbar, dass die Krümmung einer Mannigfaltigkeit von <u>n</u> Dimensionen unabhängig ist von einer „Einbettung" in eine $(n+1)$-dimensionale. Der Name „Krümmung" ist gerechtfertigt. Für eine Fläche $(n=2)$ geht unser Ausdruck in die Formel für das Gauss'sche Krümmungsmass über. $R^i_{\alpha\beta\lambda} \equiv 0$ heisst: die Mannigfaltigkeit ist euklidisch.

<u>Rückblick auf die Physik und allgemeine R.T.</u>

Die Charakterisierung einer affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist damit beendet; wir wenden uns für einen Augenblick wieder der Physik zu: Das Wesentliche an unserer Mannigfaltigkeit ist ihr „<u>Zusammenhang</u>". Das bedeutet physikalisch das Vorhandensein eines Gesetzes für die Bewegung von Punkt zu Punkt. Das ist wohl der allgemeinste Inhalt dessen was wir als Trägheitsgesetz auszusprechen gewohnt sind. Allerdings – eine Physik ohne „Messen" hat für uns keinen greifbaren Sinn. Wie wir aber hier sehen ist das Wesentliche dieser Trägheits- und Gravitationserscheinungen – eben das Bestehen eines Führungsfeldes – schon <u>ohne</u> Metrik möglich. Hier zeigt sich schon, was später noch deutlich hervortreten wird: die Einstein'sche Gravitationstheorie in der doch gerade der Krümmungstensor eine solche wichtige Rolle spielt, hat die Stufe des <u>affinen Zusammenhanges</u> fast übergangen, <u>obwohl</u> auch schon hier – auch <u>ohne</u> die Riemann'sche <u>Metrik</u> – eine solche Erscheinung im Prinzip möglich ist. Wir werden auf diesen Punkt nochmals zurückkommen. Jetzt stehen wir vor der Aufgabe unserer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Metrik zu erteilen und für diesen neuen Schritt eine physikalische Deutung zu suchen!

Wir wollen so vorgehen: Zunächst führen wir in einem Punkte der Mannigfaltigkeit eine Massbestimmung ein: wir definieren einfach nach der Art Riemanns eine „Länge" eines Vektors durch: $g_{ik}\xi^i\xi^k$. Dann genügt es uns aber nicht einfach jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine solche Massbestimmung zuzuordnen, sondern wir suchen wieder nach einem metrischen Zusammenhang. Dabei wird der Klein'sche Gedanke uns dazu behilflich sein, ein Abbildungsgesetz im unendlich Kleinen zu finden, das wir dann wieder als Gesetz der Längenübertragung deuten werden. Die physikalische Belebung dieses metrischen Zusammenhanges bildet dann den Inhalt der Weyl'schen Physik. **Weyl'sche Metrik. Plan.**

Wir gehen also von der Länge eines Vektors ξ^i in P aus: $g_{ik}\xi^i\xi^k$ **Längenübertragung**

Dabei denken wir uns der Einfachheit halber die Proportionalität durch richtige Wahl des Massstabes zu 1. gemacht. Es handelt sich nun ~~um~~ eine Zuordnung der „Längen" in zwei unendlich benachbarten Punkten P und P'. Denken wir zurück an die Annahme die Riemann gemacht hat: Die Wahl des Proportionalitätsfaktors [hier einfach = 1 in P] soll für die ganze Mannigfaltigkeit gelten. Dann ist das Verhältnis der Längen in irgend zwei Punkten (z.B. für einen konstanten Vektor) einfach durch die entsprechenden g_{ik} bedingt. Mit Weyl stellen wir uns hier auf den konsequenteren Standpunkt einer „reinen Infinitesimalgeometrie." Auch der Längenvergleich soll nur im unendlich Kleinen definiert werden.

Eine solche infinitesimale Zuordnung ergibt sich leicht dadurch, dass wir von unserer Abbildung nicht nur Erhaltung der Parallelität sondern auch der Ähnlichkeit. Hat unsere affine Gruppe die Parallelität erhalten, so soll die neue so beschaffen sein, dass dem skalaren Produkt $\xi^i \eta^i$ in P ein proportionales in P' entspricht. Damit haben wir aber auch schon das Gesetz der Längenübertragung! Ist der Proportionalitätsfaktor in P 1 so soll er in P' um $d\varphi$ davon abweichen also $(1+d\varphi)$ sein. Kenne ich also in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit das zugehörige $d\varphi$, so kenne ich auch die Länge eines Vektors den ich dorthin schiebe. Geradeso wie mir beim affinen Zusammenhang die Angabe der Komponenten Γ genügte um die Richtung eines Vektors nach einer Parallelverschiebung zu kennen: Genau so haben wir jetzt einen metrischen Zusammenhang hergestellt. Um die Metrik einer Mannigfaltigkeit vollständig zu definieren bedarf es also nicht nur der Angabe einer Fundamentalform $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ sondern auch noch einer zweiten $d\varphi$.

Dieses Gesetz der Längenübertragung lässt sich leicht in eine Formel fassen. Es seien g_{ik} und $g_{ik} + dg_{ik}$ die entsprechenden Werte in P und P'. ξ^i ~~und η^i~~ seien die Komponenten eines Vektors in P $\xi^i + d\xi^i$ ~~$\eta^i + d\eta^i$~~ die entsprechenden in P'. Dann soll sein:

(II.) $$g_{ik}\,\xi^i \xi^k = (1+d\varphi)(\xi^i + d_p\xi^i)(\xi^k + d_p\xi^k)(g_{ik} + dg_{ik})$$

Damit ist der metrische Zusammenhang definiert.

Folgerungen.

Die beiden Fundamentalformen der Metrik.

Aus diesen Forderungen lassen sich sofort wichtige Konsequenzen ziehen. (II.) gibt das Längenübertragungsgesetz für die Parallelverschiebung an. Man kann also für $d_p\xi^i$ die alte Formel (I) einsetzen. Das ergibt eine Beziehung zwischen den $d\gamma_i^k$ und dem $d\varphi$ nämlich:

(III.) $$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} - dg_{ik} = g_{ik}\, d\varphi$$

Die $d\gamma$ sind, wie wir schon wissen, lineare Differentialformen. Also muss es auch $d\varphi$ sein. Wir setzen also

$$d\varphi = \varphi_i\, dx^i \qquad (IV_1.)$$

Damit ist jene zweite Fundamentalform der Weyl'schen Metrik gefunden die gleichberechtigt neben die klassisch-Riemann'sche tritt:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (IV_2.)$$

Da der Zusammenhang zwischen den dg_i^k und den Komponenten $\Gamma_{..}$ des affinen Zusammenhanges bekannt ist lassen sich diese leicht aus (III.) berechnen. Man findet: „Grundtatsache."

$$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r\right) \qquad (V.)$$

Es ist also gelungen die Γ vollständig durch die g_{ik} und φ_i also durch die charakteristischen Grössen der metrischen Mannigfaltigkeit zu definieren. Weyl nennt dies die „Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie."
Aus der Metrik folgt schon ein affiner Zusammenhang oder: das Gesetz der Längenübertragung führt auch schon das Gesetz der Richtungsübertragung mit sich. Dies ist physikalisch von höchster Bedeutung. In einer metrischen Mannigfaltigkeit besteht nämlich von selbst ein Führungsfeld d. h. Gravitation und Trägheitswirkung. In der Riemann-Einsteinschen Gravitationstheorie spielt dies eine wichtige Rolle. Dort sind die $\Gamma_{..}$ die in die Krümmungstensoren eingehen einfach identisch mit den $\{ {}^{\cdot}_{\cdot} \}$ Daher folgt auch aus dem metrischen Charakter der Mannigfaltigkeit direkt die Gravitation.

Noch einen neuen Begriff müssen wir festlegen der sich aus der Allgemeinheit des Weyl'schen Standpunktes ergibt. Wir haben schon gesehen, dass in der Längendefinition ein Proportionalitätsfaktor willkürlich bleibt. Wir haben ihn einfach $=1$ gesetzt, also (in P): Umeichen. F_{ik}

$$l^2 = g_{ik}\,\xi^i\xi^k$$

gesetzt. Wir können ihn aber auch irgendwie anders nehmen z. B. $=\lambda$. Das entspricht der Einführung eines neuen g_{ik}:

(VI₁.) $$g'_{ik} = \lambda g_{ik} \qquad \lambda > 0$$

Diesen Vorgang nennt Weyl das „Umeichen" oder die „Masstabänderung". Eine Mannigfaltigkeit in der über den Proportionalitätsfaktor verfügt ist heisst „geeicht".

Soll der Vorgang des Umeichens auf die ganze Mannigfaltigkeit ausgedehnt werden so darf man nicht inkonsequent werden. Auch dieser Vorgang darf nur im unendlich Kleinen definiert werden. Eine Festlegung des „Eichverhältnisses" λ in P darf nicht für die ganze Mannigfaltigkeit bindend sein — sonst verfällt man wieder der Riemann'schen Annahme. Wir nehmen also λ als stetige Ortsfunktion an. Um also eine Mannigfaltigkeit vollständig beschreiben zu können brauchen wir 1.) ein Koordinatensystem x_i [im gewöhnlichen Sinne] und 2.) die Angabe der Eichung. Erst beide Angaben zusammen bilden ein „Bezugssystem".

Die Umeichung bedeutet nicht nur eine Änderung von g_{ik} in λg_{ik} sondern sie muss sich auch im $d\varphi$ äussern, bei der Längenübertragung. Das neue $d\varphi'$ bestimmt man leicht aus der Forderung, dass die neue Länge im unendlich benachbarten Punkt, also nach (II): $(1+d\varphi')(g'_{ik}+dg'_{ik})$ das $\lambda(x)$-fache der alten Länge sein solle:

$$(1+d\varphi')(g'_{ik}+dg'_{ik}) = \lambda(1+d\varphi)(g_{ik}+dg_{ik})$$

Daraus bestimmt man die einzige Unbekannte $d\varphi'$ als Funktion von λ und $d\varphi$:

(VI₂.) $$d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi - d\ln\lambda$$

Umeichen heisst also ds^2 durch $\lambda\, ds^2$ und $d\varphi$ durch $d\varphi - d\ln\lambda$ ersetzen!

Aus (VI₂) ersieht man, dass in der linearen Differentialform $d\varphi = \varphi_i\, dx_i$ ein totales Differential $d\ln\lambda$ willkürlich bleibt. Man sieht aber sofort, dass der alternierende Tensor

(VII₁.) $$F_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$$

von dieser Willkür frei ist. Ein solcher Tensor erfüllt noch die Identität:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \equiv 0 \qquad (\mathrm{VII}_2)$$

Damit kennen wir nun die charakteristischen Eigenschaften jener zweiten Fundamentalform die für die Weyl'sche Metrik bezeichnend ist. Es handelt sich jetzt nur mehr darum zu finden wie sich diese Metrik physikalisch äussert. Denn das wollen wir als eine fundamentale Erkenntnis von der allgemeinen Relativitätstheorie her übernehmen, dass metrische und physikalische Eigenschaften sich gegenseitig bedingen.

Zusammenhang mit der Physik.

Allgemeines

Es ist bekannt welche Deutung Weyl den Koeffizienten φ_i seiner linearen Differentialform gegeben hat: sie sind die Komponenten des „elektromagnetischen" Potentials — erste Komponente skalares Potential, die anderen drei das Vektorpotential. Aus diesem Ansatz folgen sofort die ersten Maxwell'schen Gleichungen. Die Vektoren des elektromagnetischen Feldes bestimmen sich nämlich aus den Potentialen durch die Gleichung

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

Diese ist aber identisch mit unserer Gleichung (VII_1) aus der dann (VII_2) folgt. (VII_2) sind aber schon die ersten Maxwell'schen Gleichungen. [Diese Schreibweise ist schon von der allgemeinen R.T. her bekannt.]

Wie die g_{ik} und φ_i in die Γ, in die Komponenten des affinen Zusammenhanges eingehen haben wir schon besprochen. Damit ist aber auch schon die Gravitation umfasst. Das Neue an der Weyl'schen Physik ist, dass es ihr gelingt auch die elektromagnetischen Phänomene, ebenso wie die Gravitation den metrischen Eigenschaften der Welt unterzuordnen.

An die Gedankengänge der allgemeinen Relativitäts-Theorie schliesst sie dadurch an, dass sie von einem Naturgesetz nicht nur Koordinaten-Invarianz — also Unabhängigkeit von der Wahl eines Koordinatensystems — verlangt, sondern auch „Eichinvarianz", d. h. Unabhängigkeit von der

Koordinaten- und Eichinvarianz

Wahl einer willkürlichen Eichung. Damit schliesst sich ein Gedankenkreis, der einst beim Galilei-Newton'schen Trägheitsgesetz seinen Ausgang genommen hat.

Die Weyl'sche Physik.

Es erübrigt sich nun noch, die Gesetze dieser Weyl'schen Physik etwas im Einzelnen zu betrachten.

Der Riemann'sche Fall: $F_{ik} = 0$

Zunächst: Was bedeutet das Nichtvorhandensein eines elektromagnetischen Feldes, also $F_{ik} = 0$? Dann folgt aus (VII_a) dass $d\varphi$ ein totales Differential ist; ich nenne es $d\log\lambda$. Eiche ich nun mit λ um so kann ich für die ganze Mannigfaltigkeit [Vgl. (VI_2)] $d\varphi' \equiv 0$ machen. D. h. die Mannigfaltigkeit ist eine Riemann'sche. [Sind dann noch die g_{ik} konstant so ist die Mannigfaltigkeit euklidisch.] Die Riemann-Einstein'sche Geometrie und Physik kann also keine Rechenschaft über das Wesen des elektromagnetischen Feldes geben, denn für die Gültigkeit der Riemann'schen Geometrie ist gerade das Verschwinden des elektromagnetischen Feldes notwendig und hinreichend. Wohl aber kann sie Gravitationserscheinungen liefern, denn wir haben es die Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie genannt, dass eine Metrik auch einen affinen Zusammenhang mit sich führt.

Gewicht eines Tensors. $n=4$.

Damit steht noch eine andere Sache in Zusammenhang, die erst hier eine Aufklärung findet. Wir haben in $F_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$ einen Tensor kennen gelernt der absolut invariant ist gegen eine Umeichung. Das führt zu einem neuen Begriff. Eicht man nämlich mit dem Eichverhältnis λ um so kann es vorkommen dass sich Tensoren mit λ^a multiplizieren. Wir sagen dann der Tensor habe das Gewicht a. (Geschrieben: $p_{ik} = [a]$) So hat z. B. nach unserer Formel (VI_1) g_{ik} das Gewicht [1] denn es ist $g_{ik}' = \lambda^1 \cdot g_{ik}$. Dann hat die Determinante der g_{ik} g im n-dimensionalen Raum das Gewicht [n] denn sie ist aus Produkten von je n g_{ik} zusammengesetzt. Also: $\sqrt{g} = \left[\frac{n}{2}\right]$ Oder: $F_{ik} = [0]$ Darin zeigt sich, dass wir es mit einer Grösse von physikalischer Bedeutung zu tun haben, denn eine solche muss von der Willkür der Eichung frei sein. Nun ist uns bereits bekannt dass sich die Maxwell'schen Gleichungen aus einem einfachen Wirkungsprinzip herleiten lassen:

$$\delta \int \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} d\omega = 0$$

Dabei ist $d\omega$ das n-dimensionale Volumelement

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Soll diese Wirkungsgrösse physikalischen Sinn haben, so muss sie das Gewicht 0 haben. Wir wollen nun den Integranden daraufhin untersuchen. $F_{ik} = [0]$ wissen wir schon. Dann ist noch

$$F^{ik} = g^{\alpha i} g^{\beta k} F_{\alpha\beta}$$

Wir brauchen also das Gewicht von g^{mn}. Nun ist:

$$g^{ik} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = [-n] + [n] + [-1] = [-1]$$

Denn wir kennen schon $g = [n]$ $g_{ik} = [1]$. Es ist also

$$F^{ik} = [-1] + [-1] + [0] = [-2]$$

und

$$d\omega = \left[\frac{n}{2}\right]$$

(Das Koordinatensystem bleibt bei der Umeichung erhalten.) Alles zusammen soll [0] geben. Das liefert für die Dimensionszahl n unserer Mannigfaltigkeit die Bedingungsgleichung:

$$[0] = [0] + [-2] + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[-2 + \frac{n}{2}\right]$$

Dies ist nur erfüllbar durch $\underline{n=4}$. Nur in einer $\underline{4}$-dimensionalen Welt sind die Maxwell'schen Gleichungen möglich!

Damit erscheint die Frage gelöst warum die ~~gerade~~ existierende Welt gerade $\underline{4}$ dimensional ist. Auch die zweite grosse Frage nach dem „Grund" der Beschaffenheit unserer vorliegenden Welt können wir jetzt „lösen". Wir legen der Physik das Axiom zu Grunde: <u>Diejenige Welt existiert</u> für die ihre <u>Wirkungsgrösse</u> $\int \mathfrak{W} dx$ ein <u>Extremum</u> erreicht: $\underline{\delta \int \mathfrak{W} dx = 0}$

<u>Zusammenfassung unter das Wirkungsprinzip.</u>

Aus der blossen Existenz einer solchen Wirkungsgrösse $\mathfrak{W}$ lässt sich – auch ohne sie selbst zu kennen – ein Rahmen von Gesetzmässigkeiten aufstellen dem sich jedes Einzelgesetz einordnen lassen muss. Zur Besprechung dieser Zusammenhänge wollen wir nun übergehen.

Vgl. hiezu Tabelle III.

Wir legen eine Mannigfaltigkeit mit Weyl'scher Metrik zu Grunde. Ihre Metrik ist gegen ein Bezugssystem gegeben durch Angabe der g_{ik} und φ_i. Unsere Wirkungsgrösse muss eine Integralinvariante sein, sowohl gegen Koordinatenänderung, als auch gegen Umeichung. Diese notwendige Eigenschaft nützen wir nun aus.

Eichinvarianz und Maxwell'sche Theorie

Man variiert die Metrik um δg_{ik} und $\delta\varphi_i$. Das Ergebnis dieser Variation ist (2.). Man berücksichtigt nun zunächst die Eichinvarianz der Wirkungsgrösse. Wir setzen also λg_{ik} statt g_{ik} und $\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$ statt φ_i. Das darf nichts ausmachen. Das liefert die Identitäten (3.) und (4.) Aus dem Postulat der Eichinvarianz folgt noch das System der 2.ten Maxwell'schen Gleichungen! Die 1.ten sind schon durch die Deutung der φ_i als elektromagnetische Potentiale sichergestellt: (5). Die Weyl'sche Theorie umfasst also zwangläufig die Maxwell'sche Theorie – und ergibt damit die 4-Dimensionalität der Welt.

Koordinateninvarianz.

Wir nehmen eine andere Veränderung vor. Die Welt werde so deformiert, dass jedem Punkt eine Verschiebung ξ zukommt. [Am Rand des Gebietes verschwinde natürlich jede Änderung.] Dabei soll die Metrik ungeändert ~~mit~~genommen werden. Für diesen Fall erhält das Hamilton'sche Prinzip die Form (6.). Es ist nun sinngemäss auf diesen Fall die Forderung der Koordinateninvarianz anzuwenden. Auch hier ergeben sich sich wieder mathematische Identitäten: ~~zunächst~~ (7.) dann (8.) Daraus lässt sich die allgemeine Form der Gravitationsgleichungen angeben (9.).

Hamilton'sches

Schliesslich wenden wir das Hamilton'sche Prinzip noch ganz allgemein auf irgend eine Variation der Metrik $\delta\varphi_i$ und δg_{ik} an (10.). Die Koeffizienten von $\delta\varphi_i$ und δg_{ik} müssen dann für sich Null sein. Die entstehenden Formeln sind dann einerseits als elektromagnetische (11.) anderseits als Gravitationsgleichungen (12.) zu deuten. Diese grundlegenden Beziehungen wenden wir auf unsere Identitäten an. Z.B. (12.) auf (8.): Das Ergebnis ist das Gesetz von der Erhaltung von Energie-Impuls.(13.) Diesen mit Hilfe der Koordinateninvarianz gewonnenen Satz kennt schon die allgemeine R.T. Ihm muss ein Seitenstück vermöge der Weyl'schen Eichinvarianz entsprechen. Tatsächlich: wendet man (11.) auf (4) an, so ergibt sich das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität! (14.) Die Elektrizität ist also auch hier völlig in den Bau der Weyl'schen Theorie aufgenommen. Gerade diese Einheitlichkeit bildet die stärkste Stütze der Theorie. Prinzip und Erhaltungssätze.

Dies lässt sich sogar noch einen Schritt weitertreiben. Bisher war unsere Formelanordnung eine streng symetrische aber auch streng geteilte. Zusammengehalten wird nur alles vom Ring des Hamilton'schen Prinzips. Zu den zentralen Erhaltungssätzen können wir aber noch auf einem zweiten Weg kommen: Wir wenden die Gravitationsgleichungen (12.) auf die Konsequenzen (3.) der Eichinvarianz an und ebenso die elektromagnetischen Grundgleichungen (11.) auf (7.). Das Ergebnis dieser – sich überschneidender – Operationen sind wieder die Erhaltungssätze!

Ich glaube es ist noch keiner Theorie gelungen einen so einheitlichen Gesetzeszusammenhang zu schaffen. Doch eines muss man heute immer bedenken: Wir haben es hier mit einer reinen Kontinuums-theorie zu tun – das geht schon von der Riemann'schen Einführung der stetigen Mannigfaltigkeit aus. Wie sich dies einmal mit den Vorstellungen der Quantentheorie auseinandersetzen wird, ist noch Schwierigkeiten.

gänzlich unbekannt. Vielleicht hängt mit diesen Fragen auch die grosse Schwierigkeit der Weyl'schen Theorie zusammen: sie liefert keinen Unterschied zwischen positiver und negativer Ladung. Weyl sucht hier einen Ausweg zu finden indem er betont, dass es sich bisher ausschliesslich um die Vorgänge im Feld gehandelt habe, dass aber über dessen Singularitäten - die Materie - überhaupt noch nichts auszusagen sei: vielleicht hat gerade hier die Quantentheorie einzugreifen.

Schluss.

Wir können diesen Fragen hier nicht weiter folgen. Das Ergebnis das uns schon am Ende des ersten Teiles unserer Betrachtungen entgegengetreten ist, drängt sich uns bei den Weyl'schen Gedankengängen noch stärker auf: Zwei anscheinend gänzlich fremde Gebiete - Geometrie oder Ausdehnungslehre und Physik - lassen sich in den Bann einer Idee zwingen. Das Ganze wird umschlossen von dem einzigen grossen Formalismus: dem Wirkungsprinzip. Wir können hier an einen Gedanken anknüpfen den Hilbert ausgesprochen hat: Wenn eine Wissenschaft eine gewisse Höhe erreicht hat verfällt sie der axiomatischen Methode und dadurch mittelbar der Mathematik. Und jetzt berührt sich wieder Manches mit dem Ausgangspunkt unserer ganzen Betrachtungen: Eine vollendete Wissenschaft führt über sich selbst hinaus - oder zur Idealisierung zurück. Soll das nicht ein Zeichen für die Grenzen unseres Erkennens sein?

Tabelle **III.**

$\mathfrak{W} = ?$

$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$

$g_{ik}' = \lambda g_{ik}$

$d\varphi = \varphi_i\, dx_i$

$\varphi_i' = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$

(1.) $$\boxed{\delta \int \mathfrak{W}\, dx = 0}$$

(10.) $$\int \left(\mathfrak{w}^i \delta\varphi_i + \frac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\delta g_{ik}\right) dx = 0$$

(11.) $$\mathfrak{w}^i = 0$$

(12.) $$\mathfrak{W}_i^k = 0$$

(14.) $$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x_k} = 0}$$

(13.) $$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0}$$

(4.) $$\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \mathfrak{w}^k}{\partial x_k}$$

(3.) $$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i \equiv 0$$

(7.) $$\frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} \equiv \Gamma_{\beta i}^{\alpha}\mathfrak{W}_\alpha^\beta - F_{ik}\mathfrak{w}^k$$

(8.) $$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k}$$

(2.) $$\int \frac{\partial \delta \mathfrak{v}^k}{\partial x_k}\, dx + \int \left(\mathfrak{w}^i \delta\varphi_i + \frac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\delta g_{ik}\right) dx = 0$$

(6.) $$\int \left(\frac{\partial(\mathfrak{W}\xi^k)}{\partial x_k} + \delta\mathfrak{W}\right) dx = 0$$

(5.) $$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \equiv 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i$$

$n = 4$

(9.) $$\mathfrak{S}_i^k + \frac{\partial \mathfrak{h}_i^{\alpha k}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{h}_i^{\alpha\beta k}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \mathfrak{W}_i^k$$

Zu den Seiten 32 – 33.

$\xi^i + d_\rho \xi^i = \xi^i - d\gamma_r^i \xi^r = \xi^i - \Gamma_{rs}^i dx_s \xi^r \qquad \Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i$ (I.) S. 24.

$R^i_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Gamma^i_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Gamma^i_{\alpha\lambda} + \Gamma^i_{r\lambda}\Gamma^r_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{r\beta}\Gamma^r_{\alpha\lambda}$ S. 24.

$g_{ik}\xi^i\xi^k = (1+d\varphi)(\xi^i + d\xi^i)(\xi^k + d\xi^k)(g_{ik} + dg_{ik})$ (II.) S. 26.

$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} - dg_{ik} = g_{ik}\, d\varphi$ (III.) S. 26.

$d\varphi = \varphi_i\, dx_i \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ($IV_{1,2}$.) S. 27.

$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{ik}\varphi_r + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r\right)$ (V.) S. 27.

$ds'^2 = \lambda\, ds^2 \qquad d\varphi' = d\varphi - d\ln\lambda$ ($VI_{1,2}$) S. 28.

$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0$ ($VII_{1,2}$) S. 29.

$\left\{ {ik \atop r} \right\} = g^{rs}\left[{ik \atop s} \right] \qquad \left[{ik \atop r} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) \qquad g^{ik} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} \qquad g = \mathrm{Det}\,|g_{ik}|$

$g^{i\alpha} a_{k\alpha} = a^i_k$

$a^i_k b^k = \sum_k a^i_k b^k = a^i_1 b^1 + a^i_2 b^2 + \ldots\ldots$

Dichte = $\sqrt{g}$. [illegible] ; $\mathfrak{W} = W \cdot \sqrt{g}$

$d\omega = \sqrt{g}\, dx = \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

I $\mathrm{curl}\, \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{div}\, \mathfrak{B} = 0$

II $\mathrm{curl}\, \mathfrak{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{s} \qquad \mathrm{div}\, \mathfrak{E} = \rho$

Zu den Seiten 17 – 34

Vergleich zwischen Formeln der Riemann'schen und Weyl'schen Metrik.

Riemann

$$g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

Weyl

$$\varphi_i\, dx_i \qquad g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

$$R^{\,i}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^{\,i}_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^{\,i}_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^{\,i}_{lr}\Gamma^{\,r}_{km} - \Gamma^{\,i}_{mr}\Gamma^{\,r}_{kl}$$

Riemann

$$\Gamma^{\,i}_{km} = \left\{ {km \atop i} \right\}$$

$$\Gamma_{i,km} = \left[{km \atop i} \right]$$

$${}^{*}R^{\,i}_{klm} = \frac{\partial \left\{ {km \atop i} \right\}}{\partial x_l} - \frac{\partial \left\{ {kl \atop i} \right\}}{\partial x_m} + \left\{ {lr \atop i} \right\}\left\{ {km \atop r} \right\} - \left\{ {mr \atop i} \right\}\left\{ {kl \atop r} \right\}$$

$$\left[{i\alpha \atop \beta} \right] + \left[{i\beta \atop \alpha} \right] = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$$

Weyl

$$\Gamma_{r,ik} = \left[{ik \atop r} \right] + \frac{1}{2}\left(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r \right)$$

$$R^{\,i}_{klm} = {}^{*}R^{\,i}_{klm} - \frac{1}{2}(\Phi) + \frac{1}{4}(\varphi) - \frac{1}{2}\delta^{k}_{i} F_{lm}$$

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r$$

Zu den Seiten 17-34.