11

Estratto "XIX Congresso Internazionale degli Orientalisti"

ROMA
Tip. della R. Accademia dei Lincei
del Dott. GIOVANNI BARDI
1938-XVI

9. PROF. O. NEUGEBAUER (Copenaghen).

Über babylonische Mathematik und ihre Stellung zur ägyptischen und griechischen.

Die charakteristischen Züge der babylonischen Mathematik im Rahmen der Entwicklung der exakten Wissenschaften im Altertum treten am deutlichsten hervor durch den Vergleich mit der ungefähr gleichzeitigen ägyptischen Mathematik und der anschliessenden griechischen Entwicklung. Im Rahmen eines kurzen Vortrages kann sich ein solcher Vergleich natürlich nur auf einige wenige Punkte beziehen, aber ich hoffe, dass sie doch ausreichen werden, um wenigstens in groben Umrissen erkennen zu lassen, welche Erkenntnisse sich aus der Erschliessung der babylonischen Mathematik für unser Verständnis eines wichtigen Teiles der geistigen Schöpfungen der antiken Kulturen ergeben haben.

Als Exponent der *griechischen* Mathematik gilt in gewissem Sinne Euklid; vor allem seine ‚Elemente' haben einen ungeheuren Einfluss auf die F o r m der ganzen folgenden Entwicklung ausgeübt. Diese F o r m ist in erster Linie jene Ausdrucksweise mathematischer Relationen, die man seit Zeuthen treffend als ‚geometrische Algebra' bezeichnet. Als einfaches Beispiel kann hier die bekannte Figur aus Euklid II,4 dienen (Figur 1), zum Ausdruck der Relation $(a+b)^2 = = a^2 + 2ab + b^2$. Ein etwas weniger auf der Hand liegendes Beispiel sei aus Apollonius (‚Kegelschnitte' I, 11) entnommen. Gegeben sei eine Strecke c und eine Richtung r (Figur 2). An die Strecke c werde ein Rechteck F_1 ‚angelegt'; wie in der Figur angedeutet, werde ein Quadrat der Fläche F_2 so an die eine Rechtecksecke Q angefügt, dass eine seiner Kantenrichtungen parallel zur gegebenen Richtung r ist. Dann gilt der Satz: Wenn $F_2 = F_1$ ist, so liegt der Eckpunkt R des Quadrates auf einer P a r a b e l, die auch durch den Punkt P geht und die in P die Richtung r als T a n g e n t e n richtung hat, während PQ zur Parabel a c h s e parallel ist.

Dies ist ein einfacher Fall dessen, was wir heute durch eine Kurven-Gleichung auszudrücken gewohnt sind [1], und gibt ein Bild davon,

[1] Die Beziehungen des genannten Satzes zu unserer Parabelgleichung erkennt man, wenn man als Richtung r die Richtung der Strecke c wählt. Dann muss also gemäss Konstruktionsvorschrift die Quadratseite QR parallel zu c sein, d. h. *senk-*

in welcher Weise die Kegelschnittslehre in der Sprache der geometrischen Algebra behandelt wird. Andererseits dienen diese Kegelschnitte auch wieder zur Lösung algebraischer Aufgaben. Die Lehre von der Auflösung q u a d r a t i s c h e r Gleichungen insbesondere ist ganz direkt mit solchen ‚Flächenanlegungen' verknüpft, so dass aus dem hier besprochenen wenigstens ein äusserer Eindruck von der charakteristischen Form griechischer ‚Algebra' zu gewinnen ist.

Eine ganz andere Stufe mathematischer Ideenbildungen finden wir in *Aegypten* vor. Das markanteste Gebiet der ägyptischen Mathe-

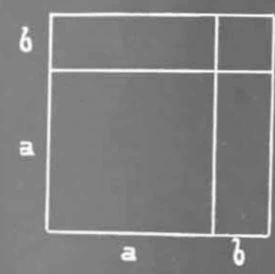

Fig. 1.

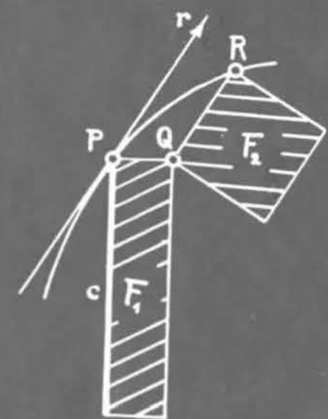

Fig. 2.

matik [1] ist bekanntlich die Bruchrechnung. Von einer ägyptischen ‚Geometrie' in dem Sinne zu sprechen, den wir diesem Worte beilegen, hat eigentlich keinen Sinn. Geometrie ist hier nicht mehr als ein reines Anwendungsgebiet der numerischen Rechnung, wie Brotverteilungen oder Getreideberechnungen usw. Die ägyptische Rechentechnik ist zwar eine sehr konsequente, aber doch im Grunde hoch archaische Methode. Als Beispiel genüge der Hinweis auf das Multiplikationsver-

recht zur Rechteckskante PQ liegen. Dann ist aber PQ nichts anderes als die Abszisse x, QR die Ordinate y des Punktes R in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit P als Koordinaten-Ursprung. Die Bedingung $F_2 = F_1$ heisst dann einfach $y^2 = = cx$ und das ist unsere übliche „Scheitelgleichung" einer Parabel.

[1] Wichtigste Texteditionen: PEET, T. E., *The Rhind mathematical papyrus.* Liverpool, University Press, 1923. STRUVE, W. W., *Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Quellen u. Studien zur Geschichte der Mathematik,* Abtlg. A. 1. Berlin, Julius Springer, 1930. Zur äg. Math. im allg. s. meine *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften* Bd. 1: *Vorgriechische Mathematik.* Verlag Julius Springer, Berlin, 1934. Kap. IV. Dort auch weitere Literaturangaben. Zitiert als „Vorlesungen".

fahren durch sukzessives Verdoppeln. Um eine Zahl z. B. zu verneunfachen, muss man sie erst verdoppeln, dann das Resultat nochmals, das neue Resultat wieder und erst dieses, also das 8-fache der Ausgangszahl, zu ihr addieren, um ihr Neunfaches zu erhalten. Die Division und Bruchrechnung erscheint noch viel umständlicher, da sie die einzelnen Summanden immer noch in oft sehr undurchsichtiger Weise in Stammbruchsummen aufzuspalten verlangt [1].

Wenden wir uns nun zur babylonischen Mathematik, so bietet schon die blosse Rechentechnik ein gänzlich anderes Bild. Während bei Aegyptern und Griechen das Zahlenrechnen und insbesondere die Bruchrechnung eine umständliche und gewiss nicht leicht erlernbare Kunst gewesen ist, braucht man für die babylonische Rechenmethode genau so viel und so wenig, wie wir für unser Rechnen, nämlich nur ein ‚kleines Einmaleins'. Dieses ‚kleine' Einmaleins besteht allerdings nicht wie bei uns nur aus $\frac{10 \cdot (10-1)}{2} = 45$ Produkten, sondern wegen der Basis 60 ihres Zahlensystems aus $\frac{60 \cdot (60-1)}{2} = 1770$ Produkten. Aber dieser Nachteil eines etwas grossen Umfangs des kleinen Einmaleins wird nicht nur durch ein sehr sinnreich angelegtes System von Tabellentexten ausgeglichen, sondern im praktischen Rechnen vor allem durch die grosse Anzahl von Teilern der Zahl 60, so dass es mindestens so bequem durchzuführen ist, wie unser dezimales Rechnen. Wirklich entscheidend, und das kann nicht deutlich genug betont werden, ist aber nicht der Wert der Basis, sondern nur der p o s i t i o n e l l e Charakter der Zahlbezeichnung. Nur diesem Positions-Charakter der Zahlbezeichnung hat die babylonische Mathematik zu danken, dass sie der Sorgen einer besonderen Bruchrechnung überhoben wurde dadurch, dass die positionelle Ziffernschreibung keinen Unterschied zwischen dem Rechnen mit ganzen Zahlen und dem Rechnen mit Brüchen aufkommen lässt.

Die weitergehende Entwicklung erstreckt sich nun in erster Linie nicht in das Gebiet der ‚Geometrie', sondern hat rein a l g e b r a i s c h e n Charakter. Es genüge, darauf hinzuweisen, dass wir zahlreiche Texte besitzen [2], die Schritt für Schritt die Auflösung linearer

[1] Vgl. dazu NEUGEBAUER, O., *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, Springer, 1926, oder Kap. IV der in Anm. 1 S. 65 zitierten Vorlesungen.

[2] Eine vollständige *Edition* aller math. Texte ist soeben erschienen: NEUGEBAUER, O., *Mathematische Keilschrift-Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*. Abtlg. A. 3. Berlin, Julius Springer, 1935. Die Texte sind sämtlich transkribiert, übersetzt und mit Kommentar versehen, ausserdem in Photographie und Autographie reproduziert. Teil II enthält ausserdem ein Glossar. Teil III mit Ergänzungen und Sachregister zu I bis III ist 1937 erschienen. Zitiert als MKT.

Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten, quadratischer Gleichungen, ja spezieller Gleichungen 3-ten, 4-ten und 6-ten Grades aufweisen, und in wohlgeordneten Serientexten mit weit über 1000 Aufgaben ein systematisches Lehrgebäude dieser Algebra entwickeln. Da gerade diese systematisch geordneten Texte rein ideographisch geschrieben sind (ansetzen möchte ich sie auf die Zeit n a c h der Hammurapi-Dynastie) [1], kann man sie unmittelbar in algebraische Formeln übersetzen, da die Ideogramme ja genau einzelnen mathematischen Grössen- und Operationssymbolen entsprechen. Als Beispiel genüge wieder eine Aufgabe aus einem dieser Texte: Ein Dreieck sei durch eine Querlinie parallel zur Basis in ein Trapez und ein restliches Dreieck zerlegt. Die Trapezfläche heisse F_o (‚obere Fläche'), die Dreiecksfläche F_u (‚untere Fläche'). Die Basis sei b_o (‚obere Breite'), die Trennungslinie b_u (*RI = pirkum*, also wörtlich ‚Riegel') und entsprechend die Teilhöhen h_o und h_u. Die letzteren sind gegeben als $h_o = 20$, $h_u = 30$. Alle übrigen Grössen sind zu berechnen, wenn noch bekannt ist, dass

$$b_o + b_o^2 + F_o = 23{,}30$$

ist [2]. Derartige Aufgaben werden des öftern in allen Einzelheiten korrekt durchgerechnet (sie verlangen die Lösung einer quadratischen Gleichung). Was uns aber hier interessiert, ist weniger dieser Sachverhalt als die Tatsache, dass es sich in der hier gegebenen Gleichung um eine ‚inhomogene' Relation handelt, bei der eine ‚Strecke' (b_o) zu ‚Flächen' (b_o^2 und F_o) ‚addiert' wird. Es handelt sich also trotz der geometrischen Sprechweise um rein a l g e b r a i s c h e Aufgaben, bei der eine wirkliche geometrische Interpretation nicht nur nebensächlich, sondern unmöglich ist. Dies bestätigen mehrere andere derartige Beispiele, die z. B. auch Multiplikation von Flächen mit Flächen enthalten. Zusammenfassend können wir sagen, dass wir es bei der babylonischen Mathematik mit einer erstaunlich hoch entwickelten Algebra zu tun haben, von einem Niveau, wie es erst wieder in der Renaissance erreicht worden ist.

Der vorangehenden Gegenüberstellung einiger markanter Tatsachen aus der Mathematik der drei grossen antiken Kulturen möchte ich

[1] Vgl. zu dieser Frage sowie zur Lokalisierungsfrage MKT, Teil I, S. 387 ff.

[2] Man hat hier 4 Unbekannte und auch 4 Relationen zu ihrer Bestimmung: 1. die gegebene Relation, 2. die Formel für die Trapezfläche, 3. die für die Dreiecksfläche und 4. die Aehnlichkeitsbeziehung zwischen Restdreieck und dem Ausgangsdreieck.

wenigstens einen knappen Hinweis auf die Fragenkreise hinzufügen, die dadurch berührt werden.

Zunächst der algebraische Charakter der babylonischen Mathematik: es ist klar, dass er, ebenso wie das Wiederaufleben der Algebra in der Neuzeit, in erster Linie auf der Existenz einer einfachen Symbolik beruht, einer F o r m e l s c h r i f t ; und diese Formelschrift wird von selbst durch die i d e o g r a p h i s c h e Schreibweise geliefert. In letzter Linie erweist sich also auch hier die Uebereinanderlagerung von Sumerisch und Akkadisch als entscheidend für die gesamte spätere Entwicklung. Als zweiten wesentlichen Punkt für das Niveau der babylonischen Mathematik haben wir den p o s i t i o n e l l e n Charakter seines Zahlensystems zu betrachten. Es würde hier viel zu weit führen, die Wurzeln dieser Erscheinung aufdecken zu wollen. Es muss der Hinweis genügen, dass auch sie nur in h i s t o r i s c h e r Untersuchung einer vielhundertjährigen Geschichte des allmählichen Entstehens abstrakter Zahlbegriffe aus ganz konkreten Mass- und Mengenbezeichnungen aufgedeckt werden können [1]. Hier liegen nun auch die Brükken zum Aegyptischen. Nicht direkt im Sinne irgendeiner ‚Uebernahme', sondern nur im Sinne eines sehr tiefgehenden Parallelismus. Die oben erwähnte ägyptische Rechenmethodik erweist sich nämlich nicht nur auch als Schlüssel zur Erklärung der Entstehung der Regeln der ganzen Bruchrechnung, sondern ist auch von grundsätzlicher Bedeutung : sie bedeutet nur die Erhaltung einer Entwicklungsstufe bis in geschichtliche Zeit hinein, die auch die babylonische Mathematik einst durchlaufen hat, nämlich einer reinen Additivität aller Rechentechnik, die noch der elementarsten Stufe reinen A b z ä h l e n s ganz nahe steht, kombiniert mit einem noch ganz unabgeschliffenen sehr ‚individuellen' Charakter der Zahlbegriffe, insbesondere der wichtigsten Bruchbegriffe wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. All dies lässt sich in beiden Kulturen auf weite Strecken in genaue Parallele setzen [2] und erweist von Neuem die

[1] Vgl. hierzu NEUGEBAUER O., *Zur Entstehung des Sexagesimalsystems. Abhandlungen Ges. Wiss. Göttingen*, Math.-phys. Klasse, N. F. 13, 1, oder Kap. III meiner Vorlesungen. Wem nicht a priori klar ist, dass die Entstehung eines Zahlensystems nicht durch einmalige ‚Entdeckungen' wie Verhältnis von Sonnendurchmesser zu Vollkreis oder ähnliche Absurditäten erklärt werden kann, der möge sich entweder über die Zahlbildungen in Eingeborenensprachen orientieren bzw. die Wandlungen der Zahlbegriffe in Europa kennen lernen, wie sie z. B. bei MENNINGER, K., *Zahlwort und Ziffer*, Verlag Hirt, 1934, ausgezeichnet geschildert werden.

[2] Den Grund hat K. SETHE durch seine Untersuchung über *Zahlen und Zahlworte bei den alten Aegyptern, Schriften Wiss. Ges. Strassburg*, 1916, H. 25, gelegt. Die mathematischen Konsequenzen habe ich dann vor allem in den in Anm. 1 S. 65 und 2 S. 66 zitierten Arbeiten gezogen.

ungeheure Bedeutung der glücklichen Richtung, die die babylonische Rechentechnik durch die allmähliche Entstehung einer positionellen Ziffernbezeichnung genommen hat.

Die griechische Mathematik baut nun in vollem Umfang auf dem Material auf, das in der babylonischen entwickelt worden ist. Ihr in der klassischen Zeit so ausgeprägter ‚geometrischer' Zug erweist sich bei näherer Untersuchung als direkte U e b e r t r a g u n g der algebraischen Regeln der babylonischen Mathematik in ein geometrisches Gewand. Dabei geht manches wieder notwendigerweise verloren, nämlich gerade die rein algebraische Entwicklungsrichtung. Andererseits hat diese Geometrisierung ihre Wurzeln in einer der glänzendsten Schöpfungen der griechischen Mathematik, der Theorie der irrationalen Grössen, in dem Sinne, als durch diese Theorie klargestellt wurde, dass der Bereich der geometrischen Grössen etwas a l l g e m e i n e r e s darstellt als der Bereich ganzzahliger Verhältnisse, der allein der antiken Rechentechnik zugänglich war. So ist es diesmal eine rein theoretische Einsicht, die die weitere Entwicklung entscheidend beeinflusst ; ihre Wurzeln liegen einerseits in den Spekulationen der griechischen Philosophie über die Natur des raum-zeitlichen Kontinuums bzw. seiner atomistischen Struktur, andererseits in ganz konkreten Fragen der Harmonielehre. So ist es also auch hier wieder erst das Ineinandergreifen vielfältiger Faktoren, das es ermöglicht, das altorientalische Material zu einem neuen Gebäude zu verwerten, dessen Grundriss auch noch für unsere Zeit bestimmend geblieben ist.

Interloquiscono brevemente i Proff. LANDSBERGER e SCHAUMBERGER.