

Ueber die Mathematik in alten Aegypten.
 =====

Von

O. Neugebauer, Göttingen. *)

Jch möchte meinen Vortrag, der sich, wie Sie wissen mit der Math. der Aeg. beschäftigen soll, nicht beginnen ohne ein Wort des Dankes. Mein Dank gilt zunächst Hrn. Prof. Toeplitz, der mir die Möglichkeit gegeben hat, hier vor Ihnen vorzutragen. Dann aber ist es mir eine besondere Befriedigung zu sehen, dass ein in allgemeinen so wenig aktuelles Thema wie ägypt. Math. doch Ihr Interesse findet. Jch darf darin wohl ein Anzeichen dafür sehen, dass Sie die Berechtigung einer Arbeitsmethode anerkennen, die eine eingehende Beschäftigung mit Einzelfragen der geschichtlichen Entwicklung unter möglichster Heranziehung aller unserer Kenntnisse über die betr. Kulturepoche als die notwendige Voraussetzung einer wirklich wissenschaftlichen Geschichtsforschung ansieht. Diese Arbeitsrichtung, die seit einigen Jahren immer mehr zur Geltung kommt, bedeutet hoffentlich das Ende eines Zustandes in der Geschichte der Math. den man - jedenfalls was die Geschichte der vorgriechischen Math. anlangt - manchmal nur mit dem Faustrecht vergleichen kann, wo es mehr auf Kühnheit des Behauptens als auf Gründlichkeit der Untersuchung ankommt.

Jch wende mich meinen Thema zu : der ägypt. Math. Aber auch innerhalb dieser wird es nur ein Teilgebiet sein, um das sich mein Bericht gruppiert : die Bruchrechnung. Da es sich aber nur um einen Bericht und keine erschöpfende Darstellung handeln kann, werde ich mir einige Exkurse erlau-

*) Vortrag, gehalten am 11. Dez. 1926 in mathem. didaktischen Kolloqu. d. Univers. Kiel.

ben, die den Zusammenhang mit weiter gestellten Fragen beleuchten sollen. Eine solche Betrachtung ist dann notwendig zugleich eine Kritik des bisher geleisteten und zwar eine negative; denn sie zeigt was alles zu tun übrig bleibt und schlimmer, was eigentlich schon getan sein müsste, bevor die eigentliche Untersuchung als wirklich gut fundiert gelten darf. Aber damit ist vielleicht bei einem so wenig bearbeiteten Gebiet wie der vorgriech. Math. zuviel verlangt, mindestens für die Kräfte eines Einzelnen; und so bitte ich Sie, vor allem den zweiten Teil meines Vortrags gewissermaßen nur als ein Programm zu betrachten.

Nun zur ägypt. Math. selbst. - Ich muss einige Bemerkungen über unsere Quellen vorausschicken. Sie alle kennen den Namen der wichtigsten von ihnen: es ist der math. „Papyrus Rhind“ des brit. Museums, der 1877 von Eisenlohr als „ein Math. Handbuch der alten Ägypter“ herausgegeben worden ist,¹⁾ und unlängst (1923) eine allen wissenschaftlichen Anforderungen gerecht werdende Neubearbeitung von dem englischen Ägyptologen T.E. Peet erfahren hat.²⁾ Die uns sonst zugänglichen Dokumente der ägypt. Math. sind zu dürftig, als dass ich Sie mit ihrer Aufzählung ermüden müsste.³⁾ Allerdings existiert noch ein zweiter wohlerhaltener math. Pap. der Moskauer Sammlung, von dem aber bisher nur ein kleines Bruchstück publiziert ist;⁴⁾ sein übriger Inhalt wird streng

1) A. Eisenlohr, Ein math. Handbuch d. alten Ägypter, Leipzig 1877.

2) T.E. Peet, The Rhind Math. Papyrus, Liverpool 1922.

3) Vgl. T.E. Peet, l.c. S. 6 ff.

4) B. Tourajeff, The volume of the truncated pyramid in Egyptian Mathematics, Ancient Egypt 1917.

geheim gehalten. Wenn also dengenäss unsere Kenntnis der ägypt. Math. nur auf sehr schwachen Beinen zu ruhen scheint, so muss man doch noch eine Art von Quellen hervorheben, die üblicherweise nicht nur ganz verschwiegen, sondern wirklich ignoriert wird : unsere allgemeine Kenntnis von der Geschichte und Kultur Aegyptens. Auf diesem Gebiet sind unsere Kenntnisse so reiche, gestützt auf unzählige Papyri religiösen und literarischen Inhalts, auf unzählige Inschriften in Gräbern und Tempeln aller Epochen einer 3000jähr. Geschichte, dass man an ihnen so wenig vorbeigehen darf, als man etwa bei der Behandlung der griech. Math. von den übrigen Aeusserungen des griech. Geisteslebens absehen kann. Und in Aeg. (sehr im Gegensatz zu anderen Teilen der orientalischen Geschichte) sind wir ausserdem in der glücklichen Lage, dass alle diese Dinge auch den Nichtägyptologen bereits in denkbar bequemer und verlässlicher Form zugänglich gemacht sind. Ich will davon sogleich Gebrauch machen, indem ich Ihnen eine Stelle aus einer berühmten „literarischen Streitschrift“ vorlese, die ganz unmittelbar auf die uns hier interessierenden Fragen Bezug nimmt. ⁵⁾ Ein Verwaltungsbeamter schreibt da einem Kollegen :

Hier haben Sie einen charakteristischen ägypt. Text vor sich; ägyptisch in jeder Hinsicht, in seinem gesamten Habitus überhaupt und für uns besonders lehrreich durch seine Einstellung zur Mathematik, - die gestellte Aufgabe könnte direkt den Pap. Rhind entnommen sein.

5) Nach Erman. Die Literatur der alten Aegypter, Leipzig 1923, S. 281 ff.

Aber sehen wir einmal nach, wie die Durchführung einer aeg. Rechnung aussieht. Bekannt genug ist die Multiplikation, die man kurz als eine „dyadische“ bezeichnen kann, da sie de facto auf die dyadische Entwicklung des einen Faktors hinauskommt. Um etwa 13 mit 11 zu multiplizieren bildet man durch fortgesetztes Verdoppeln

$$\begin{array}{r} \frac{1}{32} + \frac{1}{224} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \frac{1}{28} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{224} + \frac{1}{112} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{224} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \frac{1}{28} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{224} + \frac{1}{112} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{224} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \frac{1}{28} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{224} + \frac{1}{112} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{224} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \frac{1}{28} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{224} + \frac{1}{112} \end{array}$$

Analog gibt die zweite 1/56, die dritte 1/112 als wobei also 11 als 1 + 2 + 8 erscheint. Diese einfache Methode muss (wie wir heute wissen) immer zum Ziele führen und die Erfahrung davon genügt dem Aegypter. Die Division ist eine rein schematische Umkehrung der Multiplikation; Addition und Subtraktion sind dabei selbstverständliche Voraussetzungen - mit Recht bei dem im wesentlichen aus geeignet oft wiederholten Einzelzeichen aufgebauten Ziffernsystem der Schrift.

Soweit könnte man sich also einfach mit der Konstatierung eines primitiven Charakters der ägypt. Math. begnügen. Aber seit jeher hat ein Gebiet ihrer Arithmetik berechnete Aufmerksamkeit auf sich gezogen : die Bruchrechnung.

Eine Rechnung wie diese ⁶⁾

$$\begin{array}{r} 1 \quad \frac{32}{2+4+8} + \frac{224}{8} \\ 2 \quad \frac{64}{4+8+16} + \frac{448}{16} \\ 4 \quad \frac{128}{8+16+32} + \frac{896}{32} \\ \text{Summe} \quad \frac{16}{16} \end{array}$$

die soviel bedeutet, wie

6) Ich schreibe immer \bar{n} für $\frac{1}{n}$.

Otto Neugebauer papers - Box 14 - Publications - Volume 1, 1925-1927 - No. 5: Über die Mathematik im alten Aegypten
From the Shelby White and Leon Levy Archives Center, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{224} \right) = \frac{1}{16},$$

will garnicht mehr zu dieser „Primitivität“ passen, denn man überzeugt sich leicht, dass die roten Zahlen unter den einzelnen Brüchen (hier durch Fettdruck kenntlich gemacht) darauf hinauskommen, dass $1/28$ als gemeinsamer Nenner benutzt ist, sodass etwa die erste Zeile lautet :

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{224} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{28} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{28} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{28}.$$

Analog gibt die zweite Zeile $1/56$, die dritte $1/112$ als Wert. Es ergibt sich so als Summe aller Zeilen in der Tat $1/16$. Aber wie lässt sich eine derart komplizierte Rechnung mit so primitiven Methoden wie wir sie oben nannten, bewältigen ?

Und die Beantwortung dieser Frage wird noch weiter erschwert, wenn man sich einer andern Eigentümlichkeit der ägypt. Math. erinnert, die ihren Einfluss übrigens bis weit in unser Mittelalter hinein erstreckt : die ausschliessliche Verwendung von „Stammbrüchen“ d.h. von Brüchen des Zählers 1 (abgesehen von der einzigen Ausnahme $2/3$). Mit dieser weiteren Einschränkung die z.B. $7/8$ verbietet, wird die Durchführung unserer obigen Rechnung erst recht unklar. Gibt es etwa andere Hilfsmittel, Multiplikationstabellen oder dergleichen ? Erhalten ist uns jedenfalls nichts, abgesehen von einer Zusammenstellung von Rechnungen, die das Doppelte eines Stammbruches ungeraden Nenners als die Summe zweier oder mehrerer Stammbrüche auszudrücken gestattet.⁷⁾ Ich nenne diese Sammlung

7) Es kommt nicht etwa ein besonderes Symbol für $2/n$ vor, sondern nur eine wörtliche Umschreibung.

von Rechnungen kurz die „ $2/n$ -Tabelle.“ Diese Tabelle fügt sich zwar vollkommen in den Rahmen des dyadischen Multiplizierens und des Stammbruchmonopols, denn die Multiplikation von $1/n$ mit einer ganzen Zahl m führt in der Tat nie über Stammbrüche hinaus, sobald ich bei jeder Verdoppelung den entstehenden Bruch $\frac{2}{v}$ in eine Summe von Stammbrüchen aufzulösen verstehe - und andere Zähler als 2 treten ja niemals auf. Aber für unser obiges Problem hilft das erst recht nichts.

Doch auch diese $2/n$ -Tabelle, deren umfangreichstes Exemplar im Pap.Rhind erhalten ist (es reicht von $n = 3$ bis $n = 101$) hat ihre Tücken. Wenn auch ihr Zweck klar ist, so ist doch garnicht unmittelbar zu sehen, nach welchem Gesetz bei jeder Zerlegung eines Bruches $2/n$ in eine Summe von Stammbrüchen diese letzteren ausgewählt sind aus der grossen Menge prinzipiell zulässiger. Insbesondere kommt die einfachste Zerlegung $2/n = 1/n + 1/n$ niemals vor.

Es ist kein Wunder, dass all dieses zu vielerlei Erklärungsversuchen herausgefordert hat. Ich nenne hier nur eine sehr umfangreiche Arbeit von fast 200 Seiten von Multsch in den Abhandlungen der Leipziger Akademie.⁸⁾ Ihr Resultat ist die Aufstellung eines derartig umständlichen Systems von Regeln (es spielt dabei sogar der Primzahlbegriff eine Rolle), dass man es sicher keinem modernen Europäer, also auch wohl kaum einem alten Aegyp-

8) F. Multsch, Die Elemente der aeg. Teilungsrechnung I, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1895.

10) „On substitue aux fractions des nombres entiers ou presque entiers sur lesquels l'operation s'effectue plus aisément.“

ter einzuprägen imstande ist. Auch mathematisch sind mir die Methoden von Multsch nicht klar; er sagt z.B. ⁹⁾ :

„Es ist auszugehen von dem Axiom, dass alle Division auf einer Umgrenzung durch Multiplikation beruht“ ein Axiom, dessen Notwendigkeit mir durchaus nicht einleuchtet. - Und Rodet löst unser zuerst gestelltes Problem einfach durch die Behauptung : „Man substituiert anstelle der Brüche ganze Zahlen oder fast ganze Zahlen, auf welche sich die Operation leichter ausführen lässt.“ ¹⁰⁾

Jch sehe aber nicht, wieso es etwa in unserem obigen Beispiel, eine bequemere Rechnung ergeben soll, wenn man ~~zurück~~ $1/28$ an Stelle des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen 896 des Nenners verwendet. - Man wird sich also schon etwas gründlicher überlegen müssen, worauf das Operieren mit gebrochenen Zahlen bei einem Volke beruht, das sich seine wissenschaftlichen Hilfsmittel erst selbst schaffen musste.

Jch nenne ein Beispiel, das ich dem Pap.Rhind. entnehme und das Ihnen in seinem Charakter nun schon vertraut ist : Unter 10 Leute soll Proviant verteilt werden; zunächst 1 Brot : jeder bekommt $1/10$. Nun aber 7 Brote; wir antworten : pro Mann $7/10$. Aber wie soll man das in Wirklichkeit durchführen ? Etwa jedes Brot in 10 Teile teilen und dann jedem Mann 7 solche Stückchen geben ? Da ist das ägyptische Resultat schon viel bequemer : $2/3 + 1/30$, also in praxi einfach $2/3$. - Die Frage durch

⁹⁾ l.c. S. 91.

¹⁰⁾ Journal Asiatique XVIII. p. 219. Das französische Original lautet : „on substitue aux fractions des nombres entieres ou presque entieres sur lesquels l'operation s'effectue plus aisément.“

welchen Algorithmus man zu einem solchen Resultat gelangt, soll uns jetzt nicht beschäftigen, aber jeder, dem man das Problem in dieser Weise vorsetzt, wird wohl sofort vermuten: nun, der ägypt. Rechner wird eben so verfahren, dass der bequemste Stammbruch (d.h. hier der grösste) herausgezogen wird, sodass dann nur ein möglichst kleiner Fehler übrig bleibt. In der Tat ist dieser Schluss auch oft genug gezogen worden; aber bei näherem Zusehen ergibt sich doch, dass man so nicht durchkommt, ohne etwa den Begriff „bequem“ in ein wahres Prokrustesbett zu spannen. Und das hat seinen guten Grund, denn dieser Schluss hat zur wesentlichen Voraussetzung die Existenz und Beherrschung gewisser, wenn auch relativ einfacher math. Methoden, unter denen man sich eine geeignete aussuchen kann - so wie wir etwa zwischen einer stückweise linearen Approximation oder einer Approximation durch Polynome oder periodische Funktionen auswählen können. Aber beim Aegypter finden wir nur eine Methode und diese ist natürlich garnicht immer die mathematisch bequemste und wie gerade sie entstanden ist, wissen wir erst recht nicht. Also mit einer Auswahl zwischen an sich gleichberechtigten Mitteln ist es nichts. Und doch sagt uns ein unbestimmtes Gefühl, das sicher auch gerade bei einem der reinen Theorie nicht sehr zugewandten Menschen lebendig ist, dass die Lösung $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ etwas vernünftigeres, etwas natürlicheres ist, als die Lösung $\frac{7}{10}$, die man erst übersehen kann, wenn man das Zehntel kennt und 7 von diesem abzählt. Und damit be -

rühren wir einen Begriff, den ich für das Verständnis des gesamten praktischen Rechnens des Altertums für grundlegend halte : den Begriff des „natürlichen Bruches“ : $1/3$, $2/3$, ein Halbes, ein Viertel, das sind so recht Grössenbegriffe, die jedem von Kindesbeinen an anschaulich vertraut sind, die er kennt ohne je etwas von „gemischten Brüchen“, von „angezeigter Division“, von „Zähler“ und „Nenner“ wissen zu müssen. Und hier liegt nun in der Tat auch für das praktische Rechnen eine Auswahlmöglichkeit. Wenn es irgend angeht, müssen diese natürlichen Brüche in den Vordergrund treten, sie haben den ersten Anspruch zur Hilfe herangezogen zu werden wenn man mit den altvertrauten ganzen Zahlen nicht mehr zu Rande kommt. Freilich auch sie reichen nicht völlig aus, wenn man überhaupt einmal die abschüssige Bahn des Rechnens mit nicht ganzen Zahlen betreten hat. Aber alles was hier noch neu hinzukommt, ist eben ein notwendiges Uebel, wenn man es auch mit der Zeit zu beherrschen versteht. Aber es ist doch nur eine unvermeidliche Konsequenz des algorithmischen Rechnens, dessen eigentliche Stütze und Objekt nach wie vor die natürlichen Zahlen, „d.h. ganze Zahlen und natürliche Brüche bilden, dass nun noch neue Bruchgrössen eingeführt werden müssen - ich nenne sie kurz die „algorithmischen Brüche.“

Jch habe hiermit den entscheidenden Punkt der weiteren Untersuchungen genannt. Jch muss mich darauf beschränken über den Beweis für die Berechtigung einer

solchen Teilung aller Bruchzahlen in zwei Kategorien nur zu referieren und muss für alle Einzelheiten auf meine Arbeit „Ueber die Grundlagen der ägypt. Bruchrechnung“ verweisen.¹¹⁾ Aber es ist doch eine Reihe teils allgemeiner, teils spezifisch ägypt. Eigentümlichkeiten des Denkens, die schliesslich zu einem grossen Komplex zusammenschmelzen und erst als letztes Produkt das ergeben, was man eine math. Methode nennen darf, sodass ich doch versuchen muss, diese einzelnen Züge möglichst klar hervortreten zu lassen.

Zunächst das Fundament aller Math., das Zählen. Die Ziffernschreibung besteht wohl überall ursprünglich in dem Aneinanderfügen einzelner Marken: das klassische Musterbeispiel von Hilbert's „Kreidestrichen.“ Und dies in genauer Analogie zur Entstehung jeder Schrift, zur „Bilderschrift“, in welcher eben die Zahlen durch das Zählen der einzelnen Marken repräsentiert werden. Schon dieses müsste auf die Priorität der Kardinalzahlen vor den Ordinalzahlen führen; aber darüber hinaus ist längst auch der philologische Beweis für diese Priorität erbracht worden. Sethe hat in seiner glänzenden Untersuchung über Zahlen und Zahlworte¹²⁾, auf die auch Mathematiker nicht eindringlich genug hingewiesen werden können, gezeigt, wie sich sprachlich der Ordinalzahlbegriff erweist als Bezeichnung desjenigen, der die Reihe „voll

12) K. Sethe, Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Aegyptern, Strassburg 1916.

11) Berlin, Springer, 1926.

macht"; dass der „vierte“ soviel heisst wie „der die Reihe von vier abschliessende.“ Jch komme noch einmal auf diesen Punkt zurück und will nur erwähnen, dass in Unkenntnis solcher ausführlicher Untersuchungen über den tatsächlichen geschichtlichen Hergang sich unter Mathematikern das Dogma eingebürgert hat, die Ordinalzahl sei der ursprüngliche Begriff. Diese Ansicht wird noch neuerlich von Weyl vertreten¹³⁾ und stammt soviel ich weiss von Kronecker.¹⁴⁾ - Aber die sprachliche Untersuchung trägt noch sehr viel weiter, sie zeigt wie die höheren Einheiten, die bei der Ausbildung eines Zahlensystems notwendig werden, also etwa die Zehner oder Hunderter, nun ihrerseits zum Objekt des Zählens werden z.B. auch die Possessivsuffixe an sich ziehen und dergl. mehr. Es zeigt sich, dass in den Anfängen der Sprache keine Rede von einer multiplikativen Auffassung der Zahlworte sein kann, dass das Fundament jeder Mathematik ein rein zählendes, additives ist.

Jch wende mich zu den Brüchen. Hier zeigt wieder die Sprache ganz klar jene Scheidung in „natürliche“ und „algorithmische.“ Die ersteren sind selbständige Individuen mit selbständigen Namen : $1/2$, $1/3$, $2/3$ tragen Bezeichnungen, die gänzlich aus dem einheitlichen Schema der Bruchbezeichnung für $1/n$ bei grossem n heraus-

13) H. Weyl, Handb. d. Philos. Abt. II A S. 28.

14) L. Kronecker, Ueber den Zahlbegriff, Quelle 101, S. 339.

fallen, z.B. ist ägyptisch $1/2$ soviel wie „Seize“ usw. Und noch viel mehr, man sieht wie das, was „natürlicher Bruch“ heisst, Funktion der Zeit ist : man kann einen ältesten Teil von Bruchbezeichnungen, etwa $1/2$, $1/4$, $3/4$, $1/3$, $2/3$ herauschälen, der dann allmählich erweitert wird durch neue Bruchbezeichnungen, ganz ähnlich wie auch die natürlichen ganzen Zahlen nach oben zu in verschiedenen Zeiten verschieden früh mit der einfachen Bezeichnung „viele“ endigen. So verschwindet z.B. in Aegypten in geschichtlicher Zeit das Zahlwort für Million, später auch noch das für 100,000.¹⁵⁾

Bisher haben wir nur Eigentümlichkeiten behandelt, die mutatis mutandis wohl für die Anfänge aller Kulturen Geltung haben werden wenn sie auch gerade in Aegypten am leichtesten erkennbar sind. Nun aber kommt ein speziell ägypt. Moment zur Geltung : das eiserne Festhalten an einer Tradition. Jedem, der sich nur etwas mit ägypt. Kultur beschäftigt hat, tritt dieses immer wieder vor Augen : in der Religion, der Baukunst, der Literatur. Nicht als ob alles unverändert bliebe - das ist überall ein Ding der Unmöglichkeit - aber, wie es Erman so treffend ausgedrückt hat : „Der Aegypter liebt es, seine Eierschalen mit sich herumzutragen.“ Für die Math. äussert sich dies in der dominierenden Bedeutung eines festen Schemas. So wie die Totenformeln, die ursprünglich nur für den König oder seine

15) Sethe, l.c. S. 11 ff.

Grossen bestimmt waren, schliesslich auch auf jedem Privatgrab stehen, eigentlich widersinnig, missverständlich und rein formelhaft aber doch wörtlich übernommen, genau so wird versucht mit einer Rechenweise, die auf älteste Zeiten zurückgeht, nun auch Aufgaben zu lösen, die ein viel verwickelteres Zahlenmaterial benötigen. Die ägypt. Math. strebt nicht danach, neue Methoden für neue Probleme zu ersinnen, und damit vielleicht auch die alten Aufgaben leichter zu bewältigen, sondern die Grundtendenz der ägypt. Math. ist : mit den alten Methoden durch ein Minimum von Modifikationen auch die weiteren Probleme zu bezwingen.

Doch damit habe ich eigentlich etwas vorgegriffen und muss noch einmal zu dem ägypt. Bruchbegriff zurückkehren, vor allem zum „Stammbruch.“ Sie sehen, dieser Begriff ist für unsere jetzige Auffassung ganz in den Hintergrund getreten vor dem Begriff der natürlichen Brüche überhaupt. Und in der Tat müssen wir erst das Schicksal dieses Begriffes genauer kennen lernen, bevor wir die Bedeutung des anderen verstehen können. - Die natürlichen Brüche sind Individuen, man zählt sie demgemäss wie Dinge, wie die Einer. Nehmen wir etwa $1/n$; zählen wir solche n tel, so ergibt sich dabei ganz von selbst eine Zäsur : Nach n Schritten stossen wir auf die volle alte Einheit n n tel gleich 1. Der Bruch $\frac{n-1}{n}$ der sogenannte „Komplementbruch“ spielt in dieser Reihe

eine ausgezeichnete Rolle : noch ein ntel dazu und die ganze Reihe ist voll. Und damit finden wir wieder den Anschluss an die philologische Untersuchung und schlagen zugleich die Brücke zur Ordinalzahl : der Komplementbruch wird durch eine Kardinalzahl ausgedrückt: τὰ τρία μέρη „die drei Teile“ für $3/4$. Der letzte „vollmachende“ Stammbruch aber muss durch eine Ordinalzahl bezeichnet werden: τὸ τεταρτὸν μέρος für $1/4$.¹⁶⁾ (Ich erwähne übrigens, dass gerade diese Tatsache in Sethes Untersuchung den Ausgangspunkt für die Behandlung der Ordinalzahlbezeichnungen liefert.) Sie sehen: neben dem „Stammbruch“ $1/n$ tritt in ganz ausgezeichneter Weise der Komplementbruch. Die Menge der Brüche wird also sozusagen von zwei Seiten her angegriffen; von unten her durch die neue Einheit des Zählens, den Stammbruch, von oben her durch den letzten Schritt des Zählens, den Komplementbruch - wobei die Bedeutung des letzteren als anschaulich leicht erfassbar auch psychologisch verständlich ist.

Und was geschieht mit den Brüchen zwischen Stammbruch und Komplementbruch ? Sie sind nichts als uninteressante triviale Zwischenstufen des Zählens : habe ich k ntel und zähle noch um 1 ntel weiter, so habe ich eben $k + 1 = m$ solcher Dinge. Der „gemischte Bruch“ $\frac{m}{n}$ der uns in unserer multiplikativen Denkweise etwa als Resultat der Multiplikation einer ganzen Zahl m mit dem Bruch $\frac{1}{n}$ oder als „angezeigte Division“ oder als „Verhältnis“ erscheint, ist für ein additives Den-

16) Sethe, l.c. S. 106.

ken nur definierbar durch $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$. Denken wir nun für einen Augenblick an unsere „2/n-Tabelle“ zurück: jetzt ist es selbstverständlich, dass die Zerlegung des Doppelten von $1/n$ in $\bar{n} + \bar{n}$ nicht vorkommt, denn diese Zerlegung ist „trivial“, sie ist Definition von $2/n$ aber niemals ein Resultat. Jedes weitere Verdoppeln würde nie über die „Definitionsgleichung“ von m/n nämlich $\bar{n} + \bar{n} + \dots + \bar{n}$ hinausführen.

Aber bleiben wir bei unseren Brüchen selbst und sehen wir zu, wie sich der Einfluss des Zählens, der Einfluss der additiven Math. nunmehr geltend macht. Wie sieht jetzt etwa der Bereich der natürlichen Brüche aus? $1/2$ zugleich Stamm- und Komplementbruch; $1/3$ und $2/3$ und zwar gerade in dieser Reihenfolge gedacht (wie die Sprache zeigt); dann etwa noch $1/4$ und $3/4$. Beide Komplementbrüche, $2/3$ wie $3/4$, haben ihr eigenes Zeichen, $3/4$ allerdings nur in ältester Zeit, das später verloren geht. Doch wieso dieses? Hier greift entscheidend der ägypt. Hang zum festen Schema ein. Wie geht es denn bei den ganzen Zahlen zu? Der wichtigste Schritt im Zählen ist der Schritt von 1 zu 2, das „Nocheinmalnehmen“, der auch in der besonderen grammatischen Form des Dualis sein sprachliches Gegenbild findet.¹⁷⁾ Diesen Prozess des Nocheinmalnehmens haben wir schon zu Anfang als die beherrschende Methode der ägypt. Multiplikation kennen

17) Vgl. z. B. J. Wackernagel, Vorlesungen über Syntax I, Basel 1920, S. 73 ff.

gelernt -, eine „Multiplikation“, die natürlich keine in unserem Sinne ist, sondern nur eine wiederholte Addition. Dabei tritt aber plötzlich eine Auswahl unter der Menge aller ganzen Zahlen ein : die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, ... bilden sozusagen die „Basis“ der Darstellung aller andern Zahlen : Das Ergebnis des dyadischen Multiplikationsverfahrens ist die Auszeichnung einer einzigen besonderen Serie von Zahlen, der „dyadischen Reihe“ wie ich sie für einen Augenblick nennen will. Für das Rechnen mit ganzen Zahlen besteht von da an ein festes, das „dyadische“, Schema.

Und nun ergibt sich allmählich die Aufgabe, auch mit Brüchen zu rechnen, mit ihrer Beziehung zu den ganzen Zahlen und ihren Beziehungen untereinander Ernst zu machen. Wie das in Aegypten zu geschehen hat, ist schon oben gesagt : das gewohnte Schema wird einfach auf den neuen Bereich ausgedehnt. Das bedeutet : die Brüche (zunächst ist dabei immer nur an den beschränkten Bereich der natürlichen Brüche zu denken) erhalten eine neue Anordnung, die sich dem dyadischen Schema fügt; die „dyadische Reihe“ wird nach der andern Seite fortgesetzt durch die Brüche 2, 4, 8, ... - ich nenne diese Folge die „1/2-Reihe.“ Sie sehen, 3/4 spielt in diesem Schema keine Rolle mehr, es wird überflüssig in der Technik des Bruchrechnens und sein Zeichen verschwindet aus der Schrift. Aber der alte Bereich der natürlichen Brüche enthält noch einen Komplementbruch, der sich sehr wohl in ein dyadisches Schema fügt : der Bruch „zwei Teile“, wie es ägyptisch

für $2/3$ heisst. Neben die „ $1/2$ -Reihe“ tritt die „ $1/3$ -Reihe“ $2/3 = 3, 3, 6, \dots$. Diese Reihenfolge $3 \quad 3$ wird die allgemein herrschende in der ägypt. Math., soweit sogar, dass man $a/3$ durch Bildung von $2a/3$ berechnet! - Damit hat das Gebiet der natürlichen Brüche eine ganz neue Struktur bekommen; aber gleichzeitig sieht man auch das Einsetzen eines Auflösungsprozesses vor sich, denn das konsequent durchgeführte dyadische Schema führt natürlich sofort weit über die „natürlichen Brüche“ hinaus.

Aber das Band das die natürlichen Brüche unter sich verknüpft, und vor dem nun erschlossenen Bereich der algorithmischen Brüche auszeichnet, ist doch stark genug, um sie noch einmal, und für alles weitere entscheidend, hervortreten zu lassen: bei dem Problem der Zerlegung von $2/n$ in eine Summe von Stammbrüchen. Dass dies noch der Fall ist, hat natürlich seinen Grund darin, dass sich das Problem der $2/n$ -Zerlegung eben in dem Augenblick ergibt, wo man versucht, überhaupt mit Brüchen zu rechnen und in diesem Moment naturgemäss der Prozess der algorithmischen Auflösung eben erst einsetzen kann.

Damit wären wir am Beginn der eigentlichen ägypt. Math. oder besser der Bruchrechnung angelangt. Der Weg, den wir bis dahin zurückzulegen hatten, war kein kurzer, aber er ist auch in Wirklichkeit sicher kein kurzer und bequemer gewesen und ich bin der Ueberzeugung, dass man erst seine Schwierigkeiten voll erkennen muss, bis man zu einer rechten Einsicht in die

eigentliche ägypt. Math. gelangen kann. Nun, wo wir ihn hinter uns haben, liegt die Richtung, in der wir weiter zu gehen haben klar vor uns. Was nun zu folgen hätte, liefert nicht mehr viele prinzipiell neue Einsichten und ich will Sie nicht mit den Einzelheiten einer Untersuchung ermüden, die das Eingehen auf das uns vorliegende Zahlenmaterial zur Voraussetzung hat und in allen Einzelheiten in dem zweiten Teil meiner Arbeit über die ägypt. Bruchrechnung wiedergegeben ist; nur den Grundgedanken dieser Untersuchung will ich hier angeben und darauf verzichten alle Einzelheiten zu besprechen.

Ich knüpfe nochmals an die dyadische Multiplikation ganzer Zahlen an. Sie beruht auf der dyadischen Entwicklung des einen Faktors oder, wie wir auch sagen können, auf seiner Zusammensetzung aus Gliedern der dyadischen Reihe. Das Resultat erscheint dann als Summe von Gliedern der Form $1.n$, $2.n$, $4.n$, ... Bei der $2/n$ -Tabelle handelt es sich nun nicht mehr um einen ganzen Faktor n , sondern um einen Stammbruch \bar{n} ; er soll verdoppelt werden und das Ergebnis dieser Operation, nämlich $\bar{n} + \bar{n}$, muss irgendwie mit Hilfe anderer Stammbrüche ausgedrückt werden, um überhaupt aus dem Bereich der trivialen Darstellung herauszukommen. Verhilft vielleicht jetzt die Hereinziehung zunächst etwa des ersten Gliedes $\bar{2}.\bar{n}$ der in das Bruchgebiet hineinerstreckten dyadischen Reihe zum Aufbau von $2.\bar{n}$? Wenn dieser Versuch gelingen soll, so muss die Ergänzung von einem halben ntel auf 2 ntel

ein Stammbruch sein, d.h. es müsste modern ausgedrückt

$$\frac{2}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} = \frac{1}{n}$$

sein. Hieraus folgt : die Zerlegung von $2/n$ in eine Summe von zwei Stammbrüchen dieser Art ist immer dann aber auch nur dann möglich, wenn n durch 3 teilbar ist. Wie sich alle diese Dinge vom Standpunkt der ägypt. Math. ansehen, kann ich jetzt nicht hier auseinandersetzen; nur das allgemeine Schema liegt schon auf der Hand : anstelle der Elemente $2n, 4n, 8n$ treten jetzt ntel mit den natürlichen Brüchen zunächst der $1/2$ -Reihe, dann auch der $1/3$ -Reihe als Koeffizienten - genau wie früher die natürlichen Zahlen der dyadischen Reihe. Das Problem besteht dann darin, den ergänzenden letzten Stammbruch, das $1/m$, oder den „Ergänzungstern“, wie ich es nenne, zu bestimmen. Die dazu notwendige Rechnung, „Ergänzungsrechnung“ nennt sie der Aegypter charakteristischer Weise, führen dann ihrerseits zu einer wirklichen Technik des Bruchrechnens, die aber nach wie vor auf den beiden Grundpfeilern der ägypt. Math. beruht : dem Zählen und dem dyadischen Schema. - Das Zählen insbesondere äussert sich darin, dass man die Brüche mit „Hilfszahlen“ versieht (in roter Schrift), die einen Bruch kleineren Nenners durch einen aus ihm abgeleiteten mit grösserem Nenner direkt auszuzählen gestatten, z.B.

$$\frac{4}{7} + \frac{28}{1}$$

- also eine Sache, die begrifflich auf unseren „kleinsten gemeinsamen Nenner“ hinauskommt, aber in praxi davon durchaus verschieden ist. Es wird nämlich nun auf eine solche von irgendwo her (wie, soll uns jetzt nicht interessieren) gewonnene einfache Ausgangsrechnung ganz schematisch das dyadische Verfahren angewandt, d.h. auf Brüche und Hilfszahlen, wodurch man mühelos zu so komplizierten Resultaten gelangt wie dem ganz zu Anfang angegebenen, das aus unserem jetzigen Beispiel (das übrigens die Zerlegung von $\frac{2}{7}$ darstellt) unmittelbar durch fortgesetztes Halbieren ableitbar ist. - Will man also unser Ergebnis ganz kurz in moderner Terminologie zusammenfassen, so kann man sagen: der „Integritätsbereich“ der natürlichen ganzen Zahlen wird durch die „natürlichen Brüche“ erweitert und dieser neue Bereich dem alten Operationsschema unterworfen. Damit löst sich die ganze Kompliziertheit der ägypt. Bruchrechnung zwar nicht in Einfachheit aber doch in blosser Umständlichkeit auf, die ihrerseits den Vorteil grosser Sicherheit bot, ohne dass man sich noch im Geringsten über die begrifflichen Wurzeln dieser „Methode“ klar zu sein brauchte. - Und damit haben wir den ersten Kreis unserer Betrachtung geschlossen und sind zu dem Aegypter als Mensch zurückgekommen, wie er sich selbst vielleicht drastisch aber doch sicher lebenswahr schildert: „Jch bin einer, er liebt das Essen, er hasst das Schwätzen.“ 18)

18) Jch verdanke dieses Zitat aus einer unveröffentlichten New-Yorker Stelle der 11. Dynastie Hr. J. Polotzky, Göttingen.

Doch wir wollen nun zum Schluss unserer Betrachtungen die ausschliessliche Beschränkung auf Aeg. fallen lassen und fragen, wie sich das bisher Berichtete in den etwas allgemeineren Rahmen einer Untersuchung „vorwissenschaftlicher Mathematik“ (um einen Ausdruck von Hankel zu gebrauchen) einordnen lässt. -

Es ist von vornherein ^{erwünscht} ~~klar~~, dass eine Untersuchung der aeg. Mathematik begleitet sein muss von einem Vergleich mit der primitiven Mathematik anderer Völker, um Klarheit darüber zu gewinnen, was Allgemeingut und was spezifisch ägyptisch ist. Und da ist wieder selbstverständlich, dass es ein Kulturkreis ist, den man ganz besonders beachten muss : Der des Zweistromlandes. - So will ich also jetzt versuchen, in grossen Zügen den Ablauf der Entwicklung in diesem Gebiet zu skizzieren, muss aber hervorheben, dass ich die ausführliche Darlegung der Gründe meiner Auffassungen einer besonderen Arbeit vorbehalten muss.

Jch habe mich so vorsichtig ausgedrückt : „Kultur des Zweistromlandes“ weil diese Kultur in der Tat keine einheitliche ist. Es ist Ihnen sicher bekannt, dass der Vorherrschaft der semitischen Bewohner Babyloniens und Assyriens eine Epoche vorangeht, in der ein Volk nichtsemitischer Rasse die Führung besitzt : Die Sumerer. Nach ihren Rechenmethoden müssen wir zunächst fragen, wenn wir die folgende Entwicklung verstehen wollen, die bekanntlich durch das Schlagwort „Sexagesimalsystem“ gekennzeichnet wird.

Aber das Bild der sumerischen Math. wie es uns etwa aus den Forschungen von Thureau-Dangin und in neuester Zeit von Deimel - um nur diese beiden Namen zu nennen¹⁹⁾ - entgegentritt, ist doch bei weitem kein so übersichtliches wie in Aeg. Bereits in den ältesten uns bekannten Texten zeigt sich ein merkwürdiges Mischsystem in jeder Hinsicht : Zwar ist die Grundlage der Ziffernschreibung auch hier ganz zweifellos eine additive, aber man spürt doch schon eine deutlich multiplikativ-algorithmische Tendenz durch. Und dazu kommt, dass das Zahlensystem ^{ein} Durcheinander zumindest von Zehnersystem und Sechsersystem ist - also nicht etwa ein reines Sechzigersystem ! - dass ausserdem mit Zeichen geschrieben wird, die vermöge ihrer geringen Anzahl verschiedene Bedeutungen haben können - nicht nur hinsichtlich ihres absoluten Wertes, sondern auch hinsichtlich ihrer Verwendung in verschiedenen Gebieten der praktischen Masssysteme, etwa bei Flächenmassen oder Hohlmassen. Man sieht sich also keinem sehr erfreulichen Tatsachenmaterial gegenüber. Nur soviel ist daraus unmittelbar ersichtlich, dass auch das sogenannte Sexagesimalsystem nur das Endprodukt einer langen Entwicklung sein kann. Und von diesem Gesichtspunkt aus ist auch der Standpunkt selbstverständlich, den z.B. be-

19) Vor Allem: Thureau-Dangin Recherches sur l'origine de l'écriture cunéiforme I, Paris 1898/99. - Numération et Métrologie Suméro-égyptiennes, Rev. Ass. Bd. 18 (1921).
A. Deimel, Sumerische Grammatik, Rom 1924.

Aber das Bild der sumerischen Math. wie es uns etwa aus den Forschungen von Thureau-Dangin und in neuester Zeit von Deimel - um nur diese beiden Namen zu nennen¹⁹⁾ - entgegentritt, ist doch bei weitem kein so übersichtliches wie in Aeg. Bereits in den ältesten uns bekannten Texten zeigt sich ein merkwürdiges Mischsystem in jeder Hinsicht : Zwar ist die Grundlage der Ziffernschreibung auch hier ganz zweifellos eine additive, aber man spürt doch schon eine deutlich multiplikativ-algorithmische Tendenz durch. Und dazu kommt, dass das Zahlensystem ^{ein} Durcheinander zumindest von Zehnersystem und Sechsersystem ist - also nicht etwa ein reines Sechzigersystem ! - dass ausserdem mit Zeichen geschrieben wird, die vermöge ihrer geringen Anzahl verschiedene Bedeutungen haben können - nicht nur hinsichtlich ihres absoluten Wertes, sondern auch hinsichtlich ihrer Verwendung in verschiedenen Gebieten der praktischen Masssysteme, etwa bei Flächenmassen oder Hohlmassen. Man sieht sich also keinem sehr erfreulichen Tatsachenmaterial gegenüber. Nur soviel ist daraus unmittelbar ersichtlich, dass auch das sogenannte Sexagesimalsystem nur das Endprodukt einer langen Entwicklung sein kann. Und von diesem Gesichtspunkt aus ist auch der Standpunkt selbstverständlich, den z.B. be-

19) Vor Allem: Thureau-Dangin Recherches sur l'origine de l'écriture cunéiforme I, Paris 1898/99. - Numération et Métrologie Suméro-égyptiennes, Rev. Ass. Bd. 18 (1921).
A. Deimel, Sumerische Grammatik, Rom 1924.

reits Thureau-Dangin einnimmt, dass es nämlich von vorne-
 herein verfehlt ist, dieses System als ursprünglich und
 als das Ergebnis bewusster sogenannter „gelehrter“ Ueber-
 legungen hinzustellen : Die Frage nach der Entstehung
 des babylonischen „Sexagesimalsystems“ kann erst gestellt
 werden, wenn man über die Entwicklung der sumerischen
 Math. Klarheit hat.

Und hier ist es auch wieder eine schon längst
 festgestellte Tatsache, dass es nicht die Sechzig oder
 die Sechs ist, welche eine ausgezeichnete Rolle spielt,
 sondern das Sechstel.²⁰⁾ Die Rolle dieses Bruches klarzu-
 stellen, ist die Aufgabe.

Es steht zu erwarten, dass es sich auch hier nicht
 um ein absolutes Dominieren eines einzigen Bruches vor
 allen anderen von Anfang an handeln kann. Und in der Tat
 zeigt die nähere Betrachtung, dass auch andere „natürliche
 Brüche“ sehr wohl in Gebrauch waren und ihre Rolle spie-
 len : der Komplementbruch $5/6$ kommt vor, natürlich $1/2$,
 dann $1/3$, $2/3$. Die Anfänge sind also keine anderen wie in
 Aeg. auch. Aber eines tritt in dem Gewirr sumerischer
 Zahl- und Bruchbezeichnungen besonders deutlich hervor :
 dass alle diese Grössen in erster Linie in ihrer Bezie-
 hung zu den Massgrössen betrachtet werden müssen. Die

20) Thureau-Dangin, R.A. l.c. S. 124. Sethe, Die Zeit-
 rechnung d. alten Aegypter, Göttinger Nachr.phil. hist.
 1920 S. 101. Deimel, l.c. passim.

zahllosen „Wirtschaftstexte“ sind es gerade, in denen diese Zeichen immer wieder vorkommen, erst in Verbindung mit den Messen, mit dem Unterteilen der grösseren Mass - einheiten gewinnen die Bruchteile ihre Bedeutung. Und nur diese Entstehungsgeschichte lässt begreifen, dass uns eine solche Mannigfaltigkeit in der Art der Unterteilungen entgegentritt : Manchmal dekadisch, manchmal dyadisch, oder nach Dritteln, Sechsteln, usw. Nimmt man dieses zum Ausgangspunkt, so liegt in der Bedeutung eines Bruches wie $1/6$ nichts Wunderbares mehr. Dass schliesslich gerade $1/6$ sehr in den Vordergrund tritt, kann natürlich zum Teil in den bequemen Teilbarkeitseigenschaften von 6 gelegen sein, die bewirken, dass sich auch $1/2$, $1/3$, $2/3$ in Sechsteln auszählen lässt. Aber im Grunde genommen ist diese Ausnahmestellung sicher eine zufällige, die nicht „erklärt“ werden muss, sondern nur durch die Bequemlichkeit der damit zustande kommenden kleineren Masseinheiten zu rechtfertigen ist, so wie z.B. in Aeg. $1/7$ der „Elle“ als „Handbreite“ und $1/4$ der Handbreite als „Finger“ eine praktisch brauchbare und anschauliche Einteilung des Längenmasses gibt. Bei den Sumerern ist übrigens die Teilung der Elle keine Sechserteilung, sondern eine dezimale; dagegen tritt die Sechsteilung z.B. wesentlich bei einem Hohlmass für Saatgut auf nach dem dann Flächenmasse gemessen werden. ²¹⁾

21) Cf. Deimel, l.c. S. 194 f.

Nun aber setzt ein entscheidender Unterschied gegenüber Aeg. ein : Wohl herrscht hier wie dort unter den ganzen Zahlen zunächst das Dezimalsystem, spielen hier wie dort die natürlichen Brüche daneben ihre selbständige Rolle. Aber die dyadische Schematisierung erdrückt in Aeg. jedes Hervortreten anderer als jener Brüche, die in das dyadische Schema passen - ich erinnere Sie nur an das oben über $\frac{3}{4}$ Gesagte - und so gliedert sich z.B. auch $\frac{1}{6}$ als ganz bedeutungsloses Element in die „ $\frac{1}{3}$ -Reihe“ ein. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass diese Bruchteile auch im Volksbewusstsein zum Verschwinden zu bringen waren, so wenig wie unser rein dezimales Münzsystem, den „Groschen“ hat verdrängen können. Bei den Sumerern aber bildet sich kein so einheitliches System heraus. Vielmehr wird von den Bruchteilen aus der ursprünglich dekadisch geordnete Bereich der ganzen Zahlen beeinflusst, was naturgemäss zu einem ziemlichen Durcheinander von Sechser-, Zehner-, Dreissiger-, Sechziger-, ja Acht-zehner-Grössen führt, andererseits auch jene Tabellierungen zur Notwendigkeit macht, wie sie für den babylonischen Kulturkreis zu kennzeichnend sind. Diesem Chaos wird erst später, wohl durch die Semiten, ein Ende gesetzt, durch eine Art von Kompromiss zwischen Zehner-Teilung und Sechser-Teilung dem sogenannten „Sexagesimalsystem“, das als einigermaßen mathematisch gefasstes System vielleicht schliesslich nur noch in den gelehrten Schulen übrig bleibt, während das Rechnen des

Volkes wieder reiner dezimal wird.²²⁾

Und aller Wahrscheinlichkeit nach erfolgt gleichzeitig mit der sexagesimalen Normierung des Ueberkommenen eine weitere Regelung, der man mehr mathematische Bedeutung beigelegt hat als sie eigentlich verdient: Die Einführung einer Art von „Positionssystem.“ Die sumerische Schrift war ursprünglich eine Bilderschrift wie die ältesten Texte mit aller nur wünschenswerter Klarheit zeigen. Aber die Unbequemlichkeit des Schreibmaterials, des Tones, zwingt zu äusserster Schematisierung der Zeichen, zu einer Auflösung in einzelne Striche, was schliesslich das ergibt, was man „Keilschrift“ nennt. Demgemäss ist auch die Menge der zur Verfügung stehenden Zahlzeichen eine sehr beschränkte, was dazu führt, einem Zeichen verschiedene Werte zuzuschreiben, indem man etwa bei Sechzig mit dem der alten Einheit beginnt - es höchstens zunächst bei sorgfältigen Texten durch die Grösse unterscheidet.²³⁾ So kommt man zu einem Zeichenwechsel, den ich kurz durch das Schema „a b a b“ andeuten will, ein Schema wie es dann für das ausgebildete Sexagesimalsystem charakteristisch ist, das aber verlangt, ausfallende Glieder einer solchen Reihe irgendwie zu markieren, zunächst durch einen leeren Platz,

22) Thureau-Dangin, R.A. l.c. S. 124 f.

23) Deimel, l.c. S. 184.

dann deutlicher durch ein besonderes Merkzeichen. Von einem Zeichen für „Null“ ist dabei keine Rede, es handelt sich nicht um ein Zeichen für einen math. Begriff sondern vielmehr um ein „diakritisches“ Zeichen der Schrift. Der mathematische Gedanke der Position wird erst von den Jndern (wohl um die Wende unserer Zeitrechnung²⁴⁾) erfasst - sicher nicht in Babylonien.

Wieder drängt sich der Vergleich mit Aeg. auf : Von einer Bilderschrift ausgehend entwickelt sich dort ein Schriftsystem, das die Buchstabenschrift fast unmittelbar an die Hand legt, und das doch erst ein fremdes Volk, das nicht gehemmt ist, durch die Tradition des Selbstgeschaffenen, durch eine wirkliche „Erfindung“ zu einem der wichtigsten Instrumente menschlicher Kultur ausgestaltet.²⁵⁾

Sie sehen, wie viel der Vergleich verschiedener Kulturen lehren kann und wie notwendig er ist. Konsequenterweise führt dies zu der Aufgabe der Entstehung des Zahlbegriffes selbst und seiner Entwicklung nachzugehen. Nimmt man ein Werk, wie etwa das unlängst erschienene von W. Schmidt über „Sprachformen und Sprachkreise der Erde“ zur Hand²⁶⁾ und sieht sich z.B. die Landkarte über

24) Bühler, Grundriss der indo-arischen Philologie, Bd. I, 11.

25) Man vgl. Sethe, Der Ursprung des Alphabets, Göttinger Nachr. 1916. Gesch. Mitteilungen S. 88 ff. (Neuerdings auch als Sonderdruck erschienen.)

26) Heidelberg 1926, Kulturgesch. Bibl. 1. Reihe, Bd. 5.

die Verteilung der Zahlensysteme an, so bemerkt man wie viel auch in diesen Dingen schon von der vergleichenden Sprachwissenschaft geleistet ist und wie viel das noch für die geschichtlichen Grundlagen der Math. zu tun gibt.

Doch verlassen wir die Frühgeschichte der Math. und kehren wir zum Schluss noch einmal zu Aeg. zurück, zu einer Frage die für die Weiterentwicklung der Math. von grösster Bedeutung ist : Welches ist das Material, das die Griechen von hier übernommen haben ? Auch zur Beantwortung dieser Frage scheint mir das meiste noch zu tun übrig zu sein. Man hat zu untersuchen, wie sich die im ersten Teile meines Vortrages geschilderten Tendenzen der aeg.Math. weiter entwickeln und umbilden, wie sie vor allem auch allmählich eine multiplikative Rechenweise vorbereiten.

Mit dem Auftreten der Griechen beginnt eine neue Phase der Geschichte der Math. - Und doch, glaube ich, darf man auch hier nicht die Stetigkeit der Entwicklung übersehen. Am wenigsten gilt das sicherlich von der Geometrie, deren rein mathematische Bedeutung erst jetzt entdeckt wird - von dem Aegypter wird die Berechnung eines Speichervolumens zweifellos ganz ebenso als blosser Anwendung des Zahlenrechnens betrachtet, wie etwa eine Proviantverteilung. Denn die ersten geometrischen Sätze, z.B. über den Flächeninhalt einfacher Figuren, haben ihre psychologische Wurzel in denselben empirischen Beobachtungen, die auch zu der Tatsache führen, dass zwölf

Brote ebenso unter drei Leute zu je viere, wie unter vier Leute zu je dreien verteilt werden können. - Wenn wir aber die Arithmetik betrachten, so ist die zweifellos in viel höherem Masse jedem gewöhnlichen Manne vertraut als abstrakt-geometrische Sätze, und daher in viel engerem Zusammenhange mit der vorangehenden Entwicklung.²⁷⁾ Kronecker gibt in seinen „Vorlesungen über Zahlentheorie“ seiner Bewunderung darüber Ausdruck, dass es „bei der Unzulänglichkeit der griechischen Zahlenzeichen“ zu beweisen möglich war, dass eine Zahl $2^{n-1}p$ eine „vollkommene“ Zahl ist, d.h. gleich der Summe ihrer Teiler sei (1 eingeschlossen, sie selbst natürlich nicht), wenn

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = p$$

eine Primzahl ist. Selbstverständlich ist der ganze Typus dieses Problems absolut griechisch und verlangt vor allem die volle Erfassung des Begriffes der Teilbarkeit. Aber wenn man einmal diesen Begriff gefunden hat, so scheint es mir durchaus naheliegend zu sein, ihn gerade auf die altüberkommenen Zahlbildungen anzuwenden: Und zu diesen gehört die Summe der Potenzen von 2 wohl in erster Linie - es ist dies ja genau unsere „dyadische Reihe“, das Hauptwerkzeug der ägyptischen Math. Und dass man die Freiheit gewinnt, mit neuen Ideen an das Alte heranzutreten, liegt vielleicht gerade an der griechischen Zahlenschreibung, die das Band zerrissen hat, das alle alten Ziffernsysteme mit den Anfängen der Math., dem

27) S.8.

additiven Zählen, verbindet.

Nun - alle diese Dinge bedürfen noch einer genaueren Untersuchung und Begründung. Trotzdem wollte ich mich nicht ängstlich auf das einigermaßen Wohl - gesicherte beschränken, teils um das Soll und Haben unseres Wissens von der vorgriechischen Mathematik etwas zu beleuchten, teils aber um Ihnen zu zeigen, wie jede geschichtliche Betrachtung über sich selbst hinausweist und damit den Stempel des sich rastlos Verändernden trägt - wie ihr Objekt selbst.



Über die Konstruktion von $\sqrt{2}$ im mathematischen System
.....
.....
.....

- 1) $\sqrt{2}$ über \mathbb{Z} (Nr. 1 bis 10, 11 bis 14, 15, 16)
- 2) $\sqrt{2}$ über \mathbb{Z} mit ungenauer Angabe (Nr. 17 bis 19, 20 bis 22, 23)
- 3) $\sqrt{2}$ über \mathbb{Z} (Nr. 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100)

Wie erklärt man diese Texte "Von Zahlen und Zahlworten" ...
das Zahlwort "zwei" ...
.....



.....
.....
.....

Otto Neugebauer papers - Box 14 - Publications - Volume 1, 1925-1927 - No. 5: Über die Mathematik im alten Aegypten
From the Shelby White and Leon Levy Archives Center, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA