④

Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
an der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Otto Neugebauer
aus Graz.

Göttingen 1926.
Gedruckt in der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 21. April 1926.
Referenten: Prof. Dr. R. Courant, Prof. Dr. H. Kees, Prof. Dr. K. Sethe, Berlin.

„Es ist eben Mathematik auch eine Wissenschaft, die von Menschen betrieben wird, und jede Zeit, sowie jedes Volk hat nur Einen Geist."

H. Hankel, Tübingen 1869.

Einleitung.

Nicht nur die griechische Wissenschaft ist dem Zauber erlegen, den eine tausendjährige Vergangenheit über alles ägyptische Denken gebreitet hatte; auch die moderne Wissenschaft hat erst allmählich lernen müssen, „vorurteilslos" an die Dinge heranzutreten und sie so zu verstehen, wie sie geworden sind. Neben die Forderung, nicht alle Phasen eines Prozesses wie Gleichzeitiges und für unser Verständnis Gleichwertiges zu betrachten, tritt die andere, sich soweit als irgend möglich davor zu hüten, uns geläufige moderne Begriffe und Anschauungen auf antike Verhältnisse kritiklos zu übertragen. So selbstverständlich diese beiden Forderungen zu sein scheinen, so schwierig hatten und haben sie es, sich durchzusetzen. Auch in Untersuchungen über die Mathematik der Ägypter ist oft genug gegen sie verstoßen worden; ich brauche etwa nur auf die willkürlichen Konstruktionen von M. Cantor oder Hultsch hinzuweisen. Kritik und Sorgfalt der Historiker der Mathematik haben es in diesem Punkte nicht vermocht, mit der gleichzeitigen philologischen Arbeit Schritt zu halten.

Auch die Mathematik der letzten Jahrhunderte hat eine große Wandlung erfahren; ihre „Arithmetisierung" hat große Fortschritte gemacht und die Untersuchungen über ihre logischen Grundlagen sind in ein entscheidendes Stadium getreten. Beide Richtungen haben den Blick dafür geschärft, den begrifflichen Kern mathematischer Sätze und Operationen herauszuschälen. Es ist klar, daß auch die Geschichte gerade der Anfänge der Mathematik danach streben muß, das Verhältnis zu erkennen, in dem die Begriffe, die in der gegebenen geschichtlichen Entwicklung die ursprünglichen sind, zu jenen Begriffen stehen, die nach modernen Anschauungen diesen Platz in rein logischer Hinsicht einnehmen müßten. In dem Vergleich dieser durch eine mehrtausendjährige wechselvolle Entwicklung getrennten Gedankenreihen liegt ein großer Reiz, um so mehr als sich trotz allen Wechselspiels zwischen Ausbildung klarer Begriffe und Überwucherung durch algorithmischen Schematismus doch auch hier wieder die Macht logischer Notwendigkeit offenbart.

Es war mein Bestreben, beide Tendenzen, sowohl die der historischen wie der mathematischen Wissenschaften, soweit es in meinen Kräften stand, hier zur Geltung zu bringen.

Das wichtigste prinzipielle Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Einsicht in die ausschließlich additive Grundlage der ägyptischen Mathematik, welche der gesamten weiteren Entwicklung ihr spezifisches Gepräge gibt[1]). Für das Verständnis der ägyptischen Mathematik ist

1) Ich muß betonen, daß ich sehr wohl weiß, daß sich der Ausdruck „additiv", wie ich ihn im Folgenden gebrauche, nicht mit absoluter Schärfe umgrenzen läßt und dabei ein gewisses gefühlsmäßiges Moment eine Rolle spielt. Wollte ich diesen Begriff mit Hilfe moderner Terminologie in etwas übertriebener Härte herausarbeiten, so könnte ich sagen: „additiv" heißt ausschließliche Beschränkung auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Es ist also 1 das einzige erzeugende Element dieser Gruppe, während z. B. 2 durch $1 + 1$ definiert ist und nur als abgeleitetes Element anzusehen ist. Obwohl sich selbst eine so extreme Betrachtungsweise in weitem Maße durchführen ließe, will ich es doch vermeiden, historisch Gewordenes zu dogmatisieren; ich muß allerdings dafür in Kauf nehmen, daß meine Ausdrucksweise einen gewissen Spielraum läßt, der erst dadurch auszufüllen ist, daß man sich mit dem gesamten Charakter der aegyptischen Mathematik innerlich vertraut macht.

diese Eigentümlichkeit von größter Bedeutung. Der additive Charakter, herstammend von dem ursprünglichen Zählen, ist wohl das Kennzeichen der primitiven Mathematik eines jeden Volkes; aber gerade beim Ägypter kommt noch eine Eigenschaft hinzu, die uns auf allen Gebieten seiner Kultur immer wieder entgegentritt: er bewahrt, auch in der Weiterentwicklung und schließlichen Umgestaltung einer ursprünglichen Schöpfung, mit größter Zähigkeit ihre Rudimente, er scheut sich mit Vergangenem kurzer Hand zu brechen; lieber wird in mehr oder minder erkennbarer Weise angestückelt als neu gebaut. So wird uns in Ägypten jene Beziehung zur einfachsten Operation, zur Addition, auch in einem schon viel weiter fortgeschrittenen Stadium nicht verlassen und sich als die innere Ursache der großen Umständlichkeit des ägyptischen Rechnens erweisen. Die moderne Gliederung ägyptischer Mathematik nach „Rechnungsarten" und Disziplinen wird damit hinfällig, während die Mannigfaltigkeit der ägyptischen Terminologie nun verständlich ist: Bei der inneren Einheitlichkeit aller mathematischen Methoden kann die Bezeichnung nicht wie bei uns an diese anknüpfen, sondern richtet sich vielmehr nach dem speziellen äußerlichen Charakter des Problems, eine Tendenz, die natürlich durch die wesentlich praktische Einstellung des Ägyptertums nur noch verstärkt wird.

Nach Feststellung dieser Grundlagen wird es notwendig sein, in der oben gekennzeichneten Richtung die weitere Entwicklung zu verfolgen. Insbesondere beabsichtige ich in einer anschließenden Arbeit das weitere Material des mathematischen Papyrus Rhind und der übrigen Quellen zu verwerten.

Die ägyptische Bruchrechnung.

Das Ziel des Folgenden ist es, den Aufbau der ägyptischen Bruchrechnung, insbesondere die Stammbruch-Zerlegung, mit der sich der erste Teil des Papyrus Rhind beschäftigt, aufzuklären. Es soll gezeigt werden, daß es tatsächlich möglich ist, aus der scheinbaren Willkürlickeit dieser Rechnungen eine einfache Entstehungsgeschichte herauszulesen.

§ 1. Vorbemerkungen.

Für das Folgende wird ein Begriff von großer Bedeutung: Die Menge der *„natürlichen Brüche“*. Hierunter fasse ich alle jene Brüche zusammen, die im täglichen Leben eine ebenso individuelle Rolle spielen, wie die ganzen Zahlen, also z. B. das Halbe, das Drittel u. s. w. Den Gegensatz hierzu bilden die *„algorithmischen Brüche“*, die nur als Konsequenzen des Rechnens auftauchen, wie etwa $\frac{1}{4753}$. Ich will nun hier, wo dieser Begriff sogleich in eine ganz bestimmte Beziehung zur Bruchrechnung treten wird, versuchen, eine kurze Skizze seiner Entwicklung zu geben, wie sie mir jetzt im Zusammenhaug mit dem Folgenden am wahrscheinlichsten scheint; ich bin mir aber wohl bewußt, daß damit nur ein Rahmen gegeben sein kann, den auszufüllen die Aufgabe einer speziellen Untersuchung sein muß.

Als älteste Gruppe von „natürlichen Brüchen“ möchte ich 1/2, 1/3, 1/4 und die zugehörigen Komplementbrüche 2/3 bzw. 3/4 ansehen. Die letzteren sind die beiden einzigen Komplementbrüche, denen auch in der hieroglyphischen Schrift (wenigstens in der ältesten Zeit) besondere Zeichen zukommen [1]). Die Einfügung des Gebietes der „gebrochenen Zahlen“ in die übrige Mathematik geschieht nun, wie wir sogleich sehen werden, durch sinngemäße Ausdehnung des für die ganzen Zahlen üblichen dyadischen Schemas. Das Einsetzen dieses Algorithmus äußert sich darin, daß die natürlichen Brüche einerseits in bestimmter Weise geordnet, andererseits um einige neue vermehrt werden; geordnet in so ferne als nun die Brüche als enger zusammengehörig zu betrachten sind, die sich dyadisch aneinanderreihen lassen, d. h durch fortgesetztes Halbieren, oder rückwärts gesehen, durch fortgesetztes Verdoppeln, aus einander hervorgehen; womit sofort eine Erweiterung des Bruchgebiets verbunden ist. So entstehen aus dem ursprünglichen Komplex zwei Gruppen von Brüchen, die ich kurz als die „1/2-*Reihe*“ und die „1/3-*Reihe*“ bezeichnen will: die „1/2-Reihe“ ausgehend von 1/2, 1/4, über 1/8 fortschreitend zu 1/16, 1/32 usw. [2]), die „1/3-Reihe“ bestehend aus 2/3, 1/3, 1/6, 1/12 usw. Man sieht: der Komplementbruch 3/4 fügt sich nicht mehr in dieses Schema; in der Tat verschwindet er schon in sehr früher Zeit aus der Schrift [3]); 2/3 tritt dagegen

1) Über diese Ausnahmestellung von 2/3 und 3/4 vgl. Sethe [1], S. 91 ff., S. 98, ebenso S. 81 f.
2) Über 1/32 („der neue Teil“) vgl. Sethe [1], S. 79 f.
3) Vgl. Sethe [1], S. 98.

vor 1/3 im Gegensatz zu der ursprünglichen auf das Zählen begründeten Reihenfolge, wie sie noch in der Sprache erkennbar geblieben ist — wird doch 1/3 mit „*r* 1", 2/3 mit „*r* 2" bezeichnet [1]). In der Mathematik, d. h. beim Rechnen, das ja die Ursache dieses Vorganges bildet, wird die Reihenfolge 2/3 → 1/3 dermaßen die herrschende, daß 1/3 immer nur durch Halbierung des für 2/3 berechneten Wertes gefunden wird [2]). Schließlich erhält 1/6 keine selbständige Rolle und tritt gleichwertig etwa neben 1/12 [3]).

Damit haben wir ein Stadium der Entwicklung erreicht, wie es dem Papyrus Rhind zu Grunde liegt; für diesen werden wir speziell als „1/2-Reihe" etwa die Brüche 1/2, 1/4, 1/8 als „1/3-Reihe" 2/3, 1/3, 1/6, 1/12 zu verstehen haben, eine Abgrenzung, die sich einfach durch die damit erzielten Ergebnisse (vgl. § 2 und § 7) rechtfertigen läßt. Eine Festlegung des Bereiches der natürlichen Brüche in verschiedenen Epochen muß sich vor allem auf eine Untersuchung der gleichzeitigen Metrologie (etwa nach dem Vorbilde von Griffith [2] und [3]) stützen. Man wird aber nicht vergessen dürfen, daß die Entstehung der Rechnungen, welche im Papyrus Rhind (wenigstens in den in § 2 und § 6 zu besprechenden Teilen) enthalten sind, einer ganz wesentlich früheren Zeit entstammen können, als die effektive Abfassung des Papyrus selbst (etwa Dyn. XII). Von grundsätzlicher Bedeutung bleibt für uns nur, daß das Gebiet der natürlichen Brüche eine Unterteilung erfährt, die durch eine Art von mathematischem Schematismus bedingt ist und damit von dem ursprünglichen Bereich zu dem der „algorithmischen" Brüche überleitet.

Neben den beiden Bruchreihen spielen die übrigen Brüche nur eine sehr sekundäre Rolle, wenn sie auch im Prinzip noch den natürlichen Brüchen zuzurechnen wären. Der Bruch 1/10 ist zwar durch das dezimale Schriftsystem ausgezeichnet und kommt auch tatsächlich als Bruchteil bei Maßgrößen [4]), sowie beim praktischen Rechnen vor [5]); aber in der mathematischen Entwicklung als solcher treten weder 1/10 noch das Doppelte, 1/5, besonders hervor. Ganz Ähnliches gilt auch von 1/7 oder 1/9. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in der dominierenden Rolle, die dem dyadischen Algorithmus in der ägyptischen Mathematik zukommt. Sie ist etwa vergleichbar mit der Bedeutung des Dezimalsystems in der Gegenwart; der hohe Glaubenseifer, mit dem ihm angehangen wird, wenn auch nicht gerade auf Grund mathematischer Sachkenntnisse, mag vielleicht auch für sein ägyptisches Seitenstück kennzeichnend sein.

Ich schließe diese Vorbemerkung mit der Einführung einiger Bezeichnungen, die ich im Folgenden verwenden werde.

1) Vgl. auch Sethe [1], S. 96 f, wonach 2/3 wahrscheinlich eine Dualform ist. Vgl. Gunn [2], S. 125 (zu P. 15)

2) Die Bemerkung von Griffith [4], Text S. 16: „1/3 could only be reached through halving 2/3" möchte ich aber dadurch modifizieren, daß ich auf das „können" nicht solches Gewicht legen möchte. Vgl. auch § 4.

3) Man könnte vielleicht versuchen 1/2, 1/3, 2/3 für sich zu einer noch älteren Gruppe zusammenzufassen und damit die besondere Bedeutung von *ḥśb* (sowohl für „1/4", wie für „rechnen") in Zusammenhang zu bringen, etwa als Andeutung des hier zuerst auf das Bruchgebiet angewandten Algorithmus. Gerade der Umstand, daß 1/3 und 2/3 mit *r* 1 und *r* 2 bezeichnet werden, d. h. unter Verwendung des Wortes *r* (Mund), das dann für alle Stammbrüche in Gebrauch kommt, scheint mir darauf hinzuweisen, daß die Bezeichnungen von 1/3 und 2/3 einer andern Epoche angehören wie die der übrigen Brüche. Sonst wäre ja eine Inkonsequenz der Bezeichnungen wie *r* 1 = 1/3, *r* 2 = 2/3, aber *r* 5 = 1/5 usw. ganz unverständlich. — Eine entsprechende Veränderlichkeit im Laufe der Zeiten besteht auch im Bereiche der ganzen Zahlen (vgl. Sehte [1], S. 11 ff.). Nach unten verfolgt hat vielleicht der Ausdruck des Plurals durch Dreimalsetzen (später für d. h. „die Götter" analoge Bedeutung. Das ist selbstverständlich später in Vergessenheit geraten (Sethe [1], S. 51, Anmerkg. 1).

4) Vgl. z. B. die Tabelle bei Griffith [3], S. 410/11.

5) Z. B. Spiegelberg [1], S. 10/11. — Auf die Aufgaben No. 1 bis 6 des Pap. Rhind (Peet [1], S. 50 ff.) werde ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Die Grundaufgabe der ägyptischen Bruchrechnung bildet die Zerlegung eines „gemischten" Bruches in „Stammbrüche", also, mit Rücksicht auf die dyadische Multiplikationsmethode der Ägypter, die Aufgabe das Doppelte eines Stammbruches in einer andern als der trivialen Form $1/n + 1/n$ zu schreiben. Wenn also demnach für den ägyptischen Bruchbegriff eine Unterscheidung von „Zähler" und „Nenner" unwesentlich wird, so will ich mich doch dieser und ähnlicher moderner Termini bedienen, um nicht zu ägyptischer Umständlichkeit gezwungen zu sein, was aber nie in sachlicher Hinsicht mißverstanden werden darf. — Wie schon dort bemerkt, zähle ich auch 2/3 im allgemeinen zu den Stammbrüchen.

In ähnlichem Sinne spreche ich auch von „Tabellen", insbesondere von der „*2/n-Tabelle*", in welche ich die ersten Rechnungen des Papyrus Rhind zur Zerlegung von Brüchen der Form $2/n$ in eine Summe von Stammbrüchen zusammenfasse [1]). Ebenso werde ich auch von einer „2/3-Tabelle" oder einer „Ergänzungstabelle" reden, will aber dabei die Frage unerörtert lassen, wieweit eine solche Bezeichnung mit dem ägyptischen Empfinden übereinstimmen würde; daß aber z. B. in den auf 1/10 bezüglichen Beispielen No. 1 bis 6 des Papyrus Rhind der Fall $10 \cdot 1/10 = 1$ nicht übergangen wird, spricht doch wohl für einen gewissen tabellarischen Charakter solcher Rechnungen.

Schließlich will ich in diesem ganzen Kapitel eine Schreibweise anwenden, die sich im Verlaufe der Arbeit als sehr nützlich herausgestellt hat. Ich werde nämlich in Anpassung an das Ägyptische an Stelle von $\frac{1}{a}$ immer $\bar{a}$ schreiben, außer wenn ich mit diesen Größen im modernen Sinne gerechnet wissen will [2]). Dagegen soll die additive Verknüpfung, um eine Verwechslung mit unserer Multiplikation zu vermeiden, durch „$\dotplus$" besonders gekennzeichnet werden [3]).

Für den Bruch 2/3 verwende ich das besondere Zeichen $\bar{\bar{3}}$; ich schreibe also beispielsweise $\bar{\bar{3}} \dotplus \bar{3} = 1$. — Einige weitere Bezeichnungen sollen an späterer Stelle hinzugefügt werden.

§ 2. Der erste Teil der $2/n$-Tabelle.

Den Ausgangspunkt der weiteren Untersuchung bildet die folgende Überlegung: bei dem additiven Grundcharakter der ägyptischen Mathematik, bei dem Fehlen einer selbständigen Division, kann man zu einem Verständnis der Bruchrechnung nur dadurch zu gelangen hoffen, daß man versucht, auch sie von einem additiven Gesichtspunkt aus zu erklären. Dabei wird man erwarten dürfen, daß die Eingliederung der Bruchrechnung in die übrige Mathematik möglichst schematisch vorgenommen wurde, also insbesondere, soweit als möglich, nach der „dyadischen" Methode.

Über die begrifflichen Grundlagen der Stammbruchzerlegung habe ich schon in Kapitel I gesprochen und darauf hingewiesen, daß eine Zerlegung $2\bar{n} = \bar{n} \dotplus \bar{n}$ als „trivial" von vorneherein nicht in Betracht kommt. Wie wird man sich also zu helfen suchen, wenn man das Doppelte eines Stammbruches mit Hilfe beispielsweise zweier anderer Stammbrüche darstellen will? Kann man

1) Plate A bis D bei Peet [1] (abgesehen vom Titel); Kommentar S. 33 ff.

2) Ich möchte auf die große suggestive Kraft hinweisen, die einer solchen Äußerlicheit innewohnt. Erst durch diese Schreibweise und die der ägyptischen Art angepaßte Verwendung von zweierlei Tinte konnte ich es vermeiden, dauernd in den uns gewohnten Algorithmus zurückzufallen. Statt dessen habe ich natürlich immer wieder die Schreib- und Rechenfehler gemacht, die uns auch im Pap. Rhind begegnen. Es ist ja oft auf deren Fülle hingewiesen worden; aber nach allem was wir sonst von der Flüchtigkeit ägyptischer Schreiber gewohnt sind, und nach meiner eigenen Erfahrung übersteigen sie sicher nicht das zu erwartende Maß. Eine nicht sehr sorgfältig gesetzte erste Fahnenkorrektur einer mathematischen Arbeit ist meist nicht viel besser zu bewerten als die Leistung des alten Schreibers.

3) Die jeder Systematik Hohn sprechende Bezeichnungsweise, wie sie allmählich in Arbeiten zur Geschichte der Mathematik üblich geworden ist, findet sich leider auch in dem sonst so ausgezeichneten Werke von Peet. So soll $1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ heißen: $\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$ und dies unmittelbar neben $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$!

vielleicht dadurch zum Ziele kommen, daß man das „Verdoppeln“ der Multiplikation sozusagen nach der anderen Seite fortsetzt, d. h. von $2\overline{n}$, wenn schon nicht zu dem „trivialen“ Bestandteil $\overline{n}$, so doch zu dem nächsten Gliede der dyadischen Kette, nämlich $\overline{2}\,\overline{n}$ übergeht? Ein solches Fortsetzen des dyadischen Schemas ist ja außerdem etwas von allem Messen und Wägen ganz Vertrautes. Kann man also $2\overline{n}$ etwa aus $\overline{2}\overline{n}$ und einem geeigneten andern Stammbruch so zusammensetzen, wie man dies mit 3a und 2a+1a zu tun gewohnt ist? Nur werden jetzt Brüche an die Stelle der ganzen Zahlen treten müssen [1]), die einfachen Elemente, die „natürlichen Brüche“, werden zum Aufbau der komplizierteren dienen.

Soll ein solches Verfahren zum Ziele führen, so muß $2\overline{n} = \overline{2}\overline{n}+\overline{m}$ werden, wo $\overline{m}$ irgend einen geeigneten Stammbruch bezeichnet. Machen wir uns klar, was dies für den Ägypter bedeutet. Für jedes bestimmte $\overline{n}$ bewegen wir uns im Gebiete der „n-tel“ als Objekte des Zählens. Soll nun, um zu $2\overline{n}$ zu gelangen, ein solcher Bruch verdoppelt werden, während man andrerseits versucht mit $\overline{2}\overline{n}$ zu operieren, so handelt es sich also um den Aufbau der Anzahl 2 dieser $\overline{n}$ aus zwei Bestandteilen, nämlich $\overline{2}$ und $1+\overline{2}$. Soll aber die Zerlegung von $2\overline{n}$ nicht doch in die „triviale“ $2\overline{n} = \overline{2}\overline{n}+\overline{n}+\overline{2}\overline{n} = \overline{n}+\overline{n}$ zurückfallen, so muß der Ausdruck $(1+\overline{2})\overline{n}$ für sich allein — ich nenne ihn kurz den „*Ergänzungsterm*“ im Gegensatz zu dem „*Hauptglied*“ $\overline{2}\,\overline{n}$ [2]) — zu einem Stammbruch $\overline{m}$ führen. Oder ägyptisch ausgedrückt: $2\overline{n}$ d. h. das Doppelte eines n-tels, läßt sich dann als Summe von zwei Stammbrüchen darstellen, deren einer $\overline{2}\overline{n}$, d. h. die Hälfte dieses n-tels, ist, wenn man einen Bruch $\overline{m}$ so finden kann, daß $1+\overline{2} = \overline{m}\cdot n$ also das n-fache dieses m-tels wird. Mit einer derartigen Relation beginnen in der Tat die sämtlichen Rechnungen zur „$2/n$-Tabelle“ des Papyrus Rhind [3]).

Lassen wir aber zunächst die ägyptische Rechenweise beiseite und fragen uns, wann überhaupt eine solche Methode zu einem Ergebnis führen kann. Um $\frac{2}{n}$ in der Form $\frac{1}{2n}+\frac{1}{m}$ darstellen zu können, muß

$$\frac{2}{n}-\frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} = \frac{1}{m}$$

werden, d. h. es muß n durch 3 teilbar sein. In Tafel I habe ich die $2/n$-Tabelle des Papyrus Rhind, die von $n = 5$ bis $n = 101$ läuft, wiedergegeben [4]); ihr entnimmt man, daß die obige Zerlegung in allen Fällen, wo sie überhaupt möglich ist, ausnahmslos angewandt wird [5]). Damit sind also die Zahlen $n = 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99$ erledigt.

Ohne vorerst wieder auf die ägyptische Ausdrucksweise zurückzukommen, will ich sogleich den einmal eingeschlagenen Weg weiter verfolgen. Soll eine Zerlegung mit Hilfe des nächsten

1) Wie weit die Gleichartigkeit in der Behandlung von ganzen Zahlen und Brüchen geht, zeigt z. B. Pap. Rhind No. 61b, wo es heißt, man solle das zweifache und sechsfache von 1/5 nehmen (*ỉr ḫ[r]-k sp-f 2 sp.w 6-f*) um 2/3 von 1/5 zu erhalten (statt das 1/2 fache bzw. 1/6 fache).

2) Die Bezeichnungen „Hauptglied“ und „Ergänzungsterm“ werde ich übrigens gelegentlich auf die entsprechende Zerlegung der Zahl 2 selbst (also hier $\overline{2}$ bzw. $1+\overline{2}$) anwenden. Insbesondere gilt dies für die Tafeln.

3) Dies gilt auch für 2/3. Die Bemerkung von Peet ([1] S. 38) „No proof is necessary“ ist unrichtig und beachtet nicht die 2 im Original. Sowohl der Papyrus Rhind wie die Kahun-Papyri geben hier 3 $\overline{\overline{3}}$ 2 an und dieses steht in genauer Parallele zu den „Beweisen“, wie sie in ganz stereotyper Form in den Kahun-Papyri gegeben sind, z. B. 5 $\overline{3}$ $1+\overline{\overline{3}}$ $\overline{15}$ $\overline{3}$, was sowiel heißt wie

$$\frac{2}{5} = \overline{3}+\overline{15}, \quad \text{denn} \quad \overline{3} = (1+\overline{\overline{3}})\overline{5}, \quad \overline{15} = \overline{3}\cdot\overline{5}.$$

Ganz ebenso bedeutet 3 $\overline{\overline{3}}$ 2

$$\frac{2}{3} = \overline{\overline{3}}, \quad \text{denn} \quad \overline{\overline{3}} = 2\cdot\overline{3}.$$

4) Vgl. die Tafeln am Ende der Arbeit. Teilbarkeit durch 3 heißt also Hauptglied $\overline{2}$ und Ergänzungsterm $1+\overline{2}$.

5) $\overline{\overline{3}}$ bleibt unzerlegt. Über die Zerlegung $\overline{\overline{3}} = \overline{2}+\overline{6}$, die sich ebenfalls unserer Regel fügt, vgl. später (§ 6).

Bruches der 1/2-Reihe, mit $\overline{4}$, möglich sein, d. h. soll

$$2\overline{n} = \overline{4}\overline{n}+\overline{m}$$

sein, so muß also

$$\frac{2}{n}-\frac{1}{4n} = \frac{7}{4n} = \frac{1}{m},$$

d. h. n durch 7 teilbar werden. Wie Tafel I zeigt, ist diese Zerlegung unter den noch übrigen Zahlen angewandt bei 7, 49, 77, nicht aber bei $n = 35$ und 91, zwei Zahlen, die wir als „Ausnahmezahlen“ zu bezeichnen haben; in § 6 werde ich noch auf sie zurückkommen.

Geht man in der 1/2-Reihe noch um einen Schritt weiter, d. h. versucht man $\overline{8}$ zur Bildung des Hauptgliedes zu verwenden, so erhält man nichts Neues, da man nur auf Teilbarkeit durch 15 geführt wird, was also bereits durch den ersten Fall umfaßt wird. Auch für $\overline{16}$ gilt Entsprechendes.

Die Zerlegung in Stammbrüche war bisher nach dem Prinzip erfolgt, das für die ganzen Zahlen übliche Schema mutatis mutandis auf das Bruchgebiet auszudehnen, wobei die Brüche der 1/2-Reihe die Rolle der voranstehenden „Kennziffern“ übernahmen: statt mit 2, 4, 8 rechnet man eben mit $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$. Aber dieses Verfahren findet mit dem Gebiete der natürlichen Brüche seine Grenze: man hat nicht die mathematische Tendenz etwa rein dyadisch zu entwickeln, sondern man will kompliziertere Bildungen mit Hilfe einfacherer ausdrücken, wenn es sich auch nicht ganz vermeiden läßt, das Gebiet des „Algorithmischen“ zu betreten. Der Bereich der natürlichen Brüche ist aber mit der 1/2-Reihe nicht erschöpft; neben sie tritt noch die 1/3-Reihe, diesmal sogar im engeren Sinne verstanden, da $\overline{\overline{3}}$ wegen seines Zählers 2 nicht als Hauptglied in Betracht kommt. An $\overline{2}\overline{n}$, $\overline{4}\overline{n}$, $\overline{8}\overline{n}$ schließen sich also nun Zerlegungen mit $\overline{3}\overline{n}$, $\overline{6}\overline{n}$, $\overline{12}\overline{n}$.

Ein Hauptglied $\overline{3}\overline{n}$ führt wegen

$$\frac{2}{n}-\frac{1}{3n} = \frac{5}{3n} = \frac{1}{m}$$

auf Teilbarkeit von n durch 5. In der Tat sind 5, 25, 65 und 85 so zerlegt, während 55 und 95 einstweilen noch „Ausnahmen“ bleiben. Das Rechnen mit $\overline{6}\overline{n}$ verlangt Teilbarkeit durch 11, wofür nur noch 11 selbst und eben 55 übrig sind. In der Tat sind beide Zahlen so behandelt; 55 ist also nur von der Zerlegung mit $\overline{3}$ in die mit $\overline{6}$ geraten. Schließlich ergibt das Hauptglied $\overline{12}\overline{n}$ die Zerlegung von $2\cdot\overline{23}$ wie es auch sein soll.

Wir haben nun beide Reihen natürlicher Brüche erschöpft; die erste Tabelle in Tafel II stellt die zugehörigen Fälle nochmals zusammen.

Es liegt auf der Hand, wie man jetzt weiterzugehen hat. Wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen faßt man die einfachsten Elemente additiv zusammen und sieht nach, was sich derart ausdrücken läßt. Man wird also versuchen etwa

$$2\overline{n} = \overline{2}\overline{n}+\overline{4}\overline{n}+\overline{m}$$

zu bilden. Der Stammbruchcharakter des Ergänzungsterms $\overline{m}$ verlangt dann wegen

$$\frac{2}{n}-\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}\right) = \frac{5}{4n} = \frac{1}{m}$$

Teilbarkeit von n durch 5. Ein solches n gestattet aber bereits die einfachere Zerlegung mit dem Hauptglied $\overline{3}\overline{n}$. Dagegen liefert $\overline{4}\overline{n}+\overline{8}\overline{n}$ die Zerlegung von $2\cdot\overline{13}$. Untersucht man in dieser Weise alle durch Kombination von zwei Gliedern der 1/2- und 1/3-Reihe zu erhaltenden Fälle, so ergibt sich die zweite Tabelle von Tafel II. Wie man aus dieser entnimmt, ist eine Reihe von Fällen bereits durch Tabelle I überflüssig geworden, dagegen werden erst jetzt die Zahlen 13, 17, 19, 37 und 41 erfaßt. Dazu kommt noch $2\cdot\overline{95}$, das mit einem Hauptglied $\overline{4}\cdot\overline{95}+\overline{6}\cdot\overline{95}$ zerlegt wird an Stelle des einfacheren $\overline{3}\,.\,\overline{95}$. Damit ist also auch die zweite Ausnahmezahl aus Fall I 4) untergebracht. Dagegen erscheint 43 (zu $\overline{8}+\overline{12}$ gehörig) als Ausnahmezahl; es ist eben $\overline{8}+\overline{12}$ schon eine ziemlich extreme Kombination[1]).

Im Prinzip könnte man noch weiter gehen und dreifache Hauptglieder verwenden. Dabei zeigt sich aber, daß von den 20 möglichen Kombinationen nur vier (oder streng genommen nur zwei) nicht schon in den früheren Fällen enthalten sind. Es ist dies einerseits die Zerlegung

$$2\cdot\overline{29} = \overline{2}\cdot\overline{29}+\overline{8}\cdot\overline{29}+\overline{6}\cdot\overline{29}+(1+\overline{6}+\overline{24})\overline{29},$$

sowie die beiden weiteren mit $\overline{2}+\overline{8}+\overline{12}$ bzw. $\overline{4}+\overline{8}+\overline{3}$ im Hauptglied, die auf $n = 31$ führen, aber beide nicht angewandt sind; das Durchprobieren solcher dreigliedriger Ausdrücke setzt eben schon zu viel Systematik voraus. Wir müssen also auch 31 den „Ausnahmezahlen“ zuzählen. Schließlich erscheint noch die Summe

$$2\cdot\overline{101} = \overline{2}\cdot\overline{101}+\overline{3}\cdot\overline{101}+\overline{6}\cdot\overline{101}+\overline{101},$$

die der „trivialen“ Zerlegung äquivalent ist, da ja gerade die Relationen $\overline{2}+\overline{6} = \overline{\overline{3}}$, $\overline{3}+\overline{\overline{3}} = 1$ dem Ägypter ganz geläufig sind. Offenbar gingen hier alle Hilfsmittel zu Ende; in der Tat hat das bisher geschilderte Verfahren jetzt seine Grenzen erreicht; die noch übrigen Zahlen sind diesem Schema nicht mehr zugänglich[2]).

Fassen wir unsere, zunächst rein äußerlichen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen: Soweit es überhaupt möglich ist, erscheint das angegebene Verfahren angewandt[3]); nur vier wirkliche Ausnahmen, nämlich $n = 31$, 35, 43 und 91 sind zurückgeblieben. Aber von selbst ist noch eine zweite Gruppe von Zahlen ausgesondert, nämlich 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97, also 11 Zahlen, die ich — zusammen mit den vier anderen — kurz als die „*Ausnahmezahlen*“ bezeichnen will[4]). In § 6 werde ich noch ausführlich auf sie zurückkommen.

Unsere nächste Aufgabe wäre es jetzt, wenigstens für den soeben besprochenen Hauptteil der $2/n$-Tabelle, die Frage zu beantworten, wie sich für den Ägypter eine Rechnung vollzog, die hier zunächst ohne besondere Rücksicht auf ägyptische Denkweise dargestellt wurde. Aber zu ihrer Behandlung müssen erst weitere Eigentümlichkeiten der ägyptischen Bruchrechnung berücksichtigt werden, denen ich mich nun zuwende.

§ 3. Die erste Art von *škm*-Rechnung.

Um 7 viermal zu nehmen, führt der Ägypter die folgende Rechnung aus:

$$\begin{array}{rr} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ \diagup\ 4 & 28, \end{array}$$

1) Über die Rolle von $\overline{12}$ vgl. auch § 7.

2) Gunn ([2], S. 128 f.) meint, daß diese Zerlegung von $\frac{2}{101}$ vielleicht das Muster für alle weiteren Zerlegungen (über 99) abgegeben habe, was mir in der Tat sehr gut möglich zu sein scheint.

3) Es sind dies 34 Zerlegungen von 49 überhaupt.

4) Zufällig (d. h. mit guten mathematischen Gründen) sind diese 11 Zahlen sämtlich Primzahlen. Es ist aber klar, daß dieser Begriff in Ägypten noch keine Rolle gespielt hat. — Eine solche, sich von selbst ergebende Ausnahmestellung gewisser Primzahlen hat vielleicht auch Eisenlohr, der bereits die Teilbarkeitseigenschaften der Bruchnenner untersucht hat (vgl. Eisenlohr [2], S. 12 ff., S. 28 ff, allerdings ohne jede Beziehung zu dem dyadischen Verfahren) dazu verleitet, die Primzahlen überhaupt besonders zu betrachten. Es ist dies ein völliges Verkennen historischer Möglichkeiten.

wo die „Kennziffern“ links abzählen durch wievielfaches Setzen der ersten Zahl (hier 7) — ich möchte sie geradezu als „neue Einheit“ bezeichnen — die Zahlen jeder weiteren Zeile aus der ersten entstanden sind. Gehen wir nun zum Gebiet der Brüche über, so stehen z. B. $\overline{28}$, $\overline{14}$, $\overline{7}$ zu einander in der Beziehung, daß die Verdoppelung von $\overline{28}$ zu $\overline{14}$, die von $\overline{14}$ zu $\overline{7}$ führt; die Reihenfolge der abzählenden Kennziffern hat sich also jetzt umgekehrt; $\overline{28}$ wird zur Einheit, $\overline{7}$ erhält das Gewicht 4. Wir bewegen uns damit nicht auf dem Gebiet rein theoretischer Überlegungen: die Rechnungen des Papyrus Rhind enthalten in der Tat mehrfach solche den eigentlichen Kennziffern entgegenlaufende Zahlenreihen, die ich von nun an als „*Hilfszahlen*“ bezeichnen werde[1]) und (in Nachahmung der besonderen roten Schrift im Papyrus) durch fette Typen hervorhebe[2]). Dann haben wir also

$$\begin{array}{ccc} 1 & \overline{7} & \mathbf{4} \\ \overline{2} & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \overline{4} & \overline{28} & \mathbf{1}. \end{array}$$

Es ist hiernach klar, daß im Prinzip der Bruch mit dem größten Nenner die Hilfszahl **1** erhält; wir werden aber bald sehen, in welcher Weise von dieser ursprünglichen Regel abgewichen wird. — Aber auch im praktischen Leben kann man die Bedeutung dieser Hilfszahlen-Rechnung erkennen. Wie Lepsius[3]) gezeigt hat, werden die Monatstage derart mit Hilfe von Stammbrüchen ausgedrückt, daß 1/30, d. h. ein Tag, zur Einheit des Zählens wird (dem also die Hilfszahl **1** zukommt). Dann bedeutet z. B. $\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$ den 24., was nach Einführung der Hilfszahlen $\mathbf{20}+\mathbf{3}+\mathbf{1}$ ganz evident ist; ebenso ist durch $\overline{3}+\overline{15}$ d. h. $\mathbf{10}+\mathbf{2}$ der 12. Tag gegeben[4]).

Ohne mich an dieser Stelle mit Fragen aufzuhalten, die sich an das Rechnen mit Hilfszahlen knüpfen, wende ich mich jetzt einer Gruppe von Rechnungen des Papyrus Rhind zu, die Peet als „first group of completions (*škm*)“ zusammenfaßt, und die nach der Eisenlohr'schen Zählung die Nummern 7 bis 20 tragen[5]). Dabei werde ich zunächst von den Hilfszahlen absehen, um sie danach um so entscheidender heranzuziehen.

Ich beginne mit Nr. 11. Dort steht

$$\text{Nr. 11}\qquad \begin{array}{cc} 1 & \overline{7} \\ \overline{2} & \overline{9} \\ \overline{4} & \overline{18} \\ & \text{Summe } \overline{4}; \end{array}\qquad \text{verbessert: } \overline{14}$$

$\overline{18}$ in $\overline{28}$ zu verbessern ist unterlassen, aber die Summe ist richtig mit $\overline{4}$ angegeben[6]). Modern ausgedrückt haben wir also hier die Berechnung von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{7}$ angegeben.

Hieran schließen sich nun einerseits Nr. 7, 7 b, 10 und 9, andrerseits Nr. 12, 13 und 14, 15. Nr. 7 und 7 b[7]) lauten

1) Hultsch [1] redet von „Hilfseinheiten“.

2) Ich setze sie allerdings zur Platzersparnis meist rechts, nicht unter die zugehörigen Zahlen.

3) [1], insbesondere S. 102 ff. — Ich verdanke Prof. Sethe den Hinweis auf diese Arbeit.

4) Ähnliches gilt für die Einteilung der Elle. Interessant ist hier die Abweichung im Fall des Komplementbruches 23/24, der „23“ statt „$\overline{\overline{3}}+\overline{6}+\overline{8}$“ heißt (Lepsius [1], S. 108 f.).

5) Für den hieratischen Text vgl. Eisenlohr [1], Tafel IX. — Diese Aufgaben enthalten übrigens besonders viele Flüchtigkeitsfehler, auf deren, meist schon von Peet gegebene Verbesserung ich aber doch eingehen muß. Im allgemeinen gebe ich dann die Rechnungen immer in ihrer richtigen Form wieder. Eine Zusammenstellung findet sich auf Tafel III.

6) Vgl. Peet [1], S. 55.

7) Sie unterscheiden sich nur durch Weglassung einiger Hilfszahlen in 7 b.

	1	$\overline{4}+\overline{28}$
Nr. 7, 7b	$\overline{2}$	$\overline{8}+\overline{56}$
	$\overline{4}$	$\overline{16}+\overline{112}$
		Summe $\overline{2}$

$\overline{4}+\overline{28}$ ist die der $2/n$-Tabelle entsprechende Zerlegung von 2/7, so daß wir hier das Resultat von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{2}{7}$ vor uns haben. Dazu kommt noch Nr. 10 mit

	1	$\overline{4}+\overline{28}$	
Nr. 10	$\overline{2}$	$\overline{7}$	
	$\overline{4}$	9	(sic)
		Summe $\overline{2}$	

also, abgesehen von Schreibfehlern [1]) nochmals dasselbe Ergebnis.

Schließlich Nr. 9

	1	$\overline{2}+\overline{10}$
Nr. 9	$\overline{2}$	$\overline{4}+\overline{20}$
	$\overline{4}$	$\overline{8}+\overline{50}$
		Summe 1.

Das Erscheinen einer Summe 1 verlangt eine Verbesserung [2]) in

1	$\overline{2}+\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{4}+\overline{28}$
$\overline{4}$	$\overline{8}+\overline{56}$
	Summe 1

also in $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{4}{7}$.

Wie wir bisher 1/7, 2/7, 4/7 aus einander abgeleitet haben, so handeln Nr. 12, 13 bezw. 14, 15 von 1/14 und 1/28.

Nr. 12 lautet

	1	$\overline{9}$	verbessert: $\overline{14}$
Nr. 12	$\overline{2}$	$\overline{28}$	(verbessert aus $\overline{18}$)
	$\overline{4}$	$\overline{36}$	
		Summe $\overline{8}$	

muß also eigentlich

1	$\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{28}$
$\overline{4}$	$\overline{56}$
	Summe $\overline{8}$

heißen [3]) und handelt von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{14}$ in direktem Anschluß an Nr. 11.

Nr. 13 dagegen

	1	$\overline{16}+\overline{112}$
Nr. 13	$\overline{2}$	$\overline{32}+\overline{224}$
	$\overline{4}$	$\overline{64}+\overline{448}$
		Summe $\overline{8}$

ist aus Nr. 7 (welche sich auf 2/7 bezog) durch Vervierfachung der Nenner entstanden.

1) Vgl. Peet [1], S. 55.

2) Peet [1], S. 55.

3) Peet [1], S. 56. Vgl. auch Nr. 14.

An Nr. 12 schließt sich Nr. 14 mit

	1	$\overline{18}$
Nr. 14	$\overline{2}$	$\overline{36}$
	$\overline{4}$	$\overline{72}$
		Summe $\overline{16}$.

Es ist originell zu sehen, wie die Verdoppelung ganz schematisch vorgenommen wurde: der Anfangsfehler 1 $\overline{9}$ aus Nr. 12 ist einfach hierher übernommen, obwohl das Resultat richtig dasteht. Nr. 14 sollte nämlich lauten [1])

1	$\overline{28}$
$\overline{2}$	$\overline{56}$
$\overline{4}$	$\overline{112}$

und gibt $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{28}$ an. Dasselbe leistet wieder Nr. 15 im Anschluß an Nr. 13

	1	$\overline{32}+\overline{228}$
Nr. 15	$\overline{2}$	$\overline{64}+\overline{456}$
	$\overline{4}$	$\overline{128}+\overline{912}$
		Summe $\overline{16}$.

Der Text bemerkt hierzu „falsch" und hat recht damit; es sollte $\overline{224}$ statt $\overline{228}$ heißen. Dann ergibt sich [2])

1	$\overline{32}+\overline{224}$
$\overline{2}$	$\overline{64}+\overline{448}$
$\overline{4}$	$\overline{128}+\overline{896}$
	Summe $\overline{16}$.

Damit haben wir also folgende Tabelle gewonnen: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ wird kombiniert in

Nr. 9	mit	4/7
Nr. 7, 7b, 10	„	2/7
Nr. 11	„	1/7
Nr. 12, 13	„	1/14
Nr. 14, 15	„	1/28.

Die eben dargelegten Zusammenhänge lassen sich aber noch weiter verfolgen, sobald man die bisher beiseite gelassenen Hilfszahlen berücksichtigt, die sich bei einigen dieser Rechnungen finden. Gehen wir nochmals zu Nr. 7 zurück, so lautet diese Rechnung ausführlicher so:

$$\begin{array}{lccccc}
 & 1 & \overline{4} & + & \overline{28} & \\
 & & \mathbf{7} & & \mathbf{1} & \\
\text{Nr. 7} & \overline{2} & \overline{8} & + & \overline{56} & \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{2}{7}. \\
 & & \mathbf{3+\overline{2}} & & \mathbf{\overline{2}} & \\
 & \overline{4} & \overline{16} & + & \overline{112} & \\
 & & \mathbf{1+\overline{2}+\overline{4}} & & \mathbf{\overline{4}} &
\end{array}$$

Die erste Zeile enthält also gerade solche Hilfszahlen, wie sie nach den einleitenden Bemerkungen dieses Paragraphen als ursprüngliche anzusehen sind, nämlich g a n z e Zahlen. Die weiteren Zeilen

1) Peet hat die Notwendigkeit dieser Korrektur übersehen. — Indessen hat auch G u n n in seiner ausführlichen Anzeige von Peet's Edition diese Verbesserung vorgenommen ([2], S. 129 f.). Überhaupt hat Gunn die Zusammengehörigkeit der einzelnen Rechnungen dieser Gruppe in der Reihenfolge erkannt, wie ich sie im Folgenden angebe. Gunn's Arbeit ist mir erst nach Abschluß meiner eigenen bekannt geworden.

2) Peet [1], S. 56.

gehen dann aus dieser ersten, samt ihren Hilfszahlen, durch schematische Ausführung des Halbierens hervor, wie es die Kennziffern $\bar{2}$ und $\bar{4}$ angeben. Wir sehen also hier ganz deutlich vor uns, wie der dyadische Algorithmus von einem einfachen Ausgangspunkte aus zu neuen Bildungen überleitet. In Nr. 7b ist diese Rechnung nochmals wiederholt, nur sind die Hilfszahlen der beiden ersten Zeilen vergessen. Aber wir können mehr sagen: an Stelle von Nr. 7b sollte eine andere Rechnung stehen, die uns fehlt. Die Rechnungen Nr. 13 und 15 zeigen nämlich das folgende System der Hilfszahlen

$$\text{Nr. 13}\qquad \begin{array}{lr} \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} & \bar{\mathbf{4}} \\ \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \\ \bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} & \overline{\mathbf{16}} \end{array}\qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{14},$$

$$\text{Nr. 15}\qquad \begin{array}{lr} \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \\ \bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} & \overline{\mathbf{16}} \\ \bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}}+\overline{\mathbf{32}} & \overline{\mathbf{32}} \end{array}\qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{28}.$$

Man sieht: Diese Zahlen sind nicht nur Zeile für Zeile auseinander schematisch entwickelt, sondern Nr. 15 als Ganzes ist die Hälfte von Nr. 13 — und diese genau ein Viertel von Nr. 7, so wie 1/28, 1/14 und 2/7 auseinander hervorgehen [1]). Es fehlt also das zu 1/7 gehörige Zwischenglied (mit Rücksicht auf Späteres bezeichne ich es mit [Nr. 11b]):

$$\text{[Nr. 11 b]}\qquad \begin{array}{llr} 1 & \bar{8}+\overline{56} & \\ & \mathbf{3}+\bar{\mathbf{2}} & \bar{\mathbf{2}} \\ \bar{2} & \overline{16}+\overline{112} & \\ & \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} & \bar{\mathbf{4}} \\ \bar{4} & \overline{32}+\overline{224} & \\ & \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \end{array}\qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{7}$$

an dessen Stelle Nr. 7b getreten sein mag.

Nachdem so die Nummern 7, [11b], 13, 15 in eine feste Reihenfolge gebracht sind, lassen sich nun auch leicht die übrigen Nummern einordnen. Nr. 11, 12 und 14 stehen dadurch in offenbarem Zusammenhang, daß sie unmittelbar von 1/7 ausgehen und nicht die Zerlegung von 2/7 wie Nr. 7 benützen. Nr. 11 und 12 zeigen keine Hilfszahlen, wohl aber Nr. 14, und zwar in folgender Art

$$\begin{array}{lrr} 1 & \overline{28} & \mathbf{1} \\ \bar{2} & \overline{56} & \bar{\mathbf{2}} \\ \bar{4} & \overline{112} & \bar{\mathbf{4}} \end{array}$$

also in scheinbar zweckloser Reihenfolge, da sie ja mit den Kennziffern identisch sind. Berücksichtigt man aber den Übertragungsmechanismus, den wir soeben bei den anderen Rechnungen kennen gelernt haben, so müßte durch Verdoppeln rückwärts übertragen Nr. 12 lauten:

$$\begin{array}{lrr} 1 & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \bar{2} & \overline{28} & \mathbf{1} \\ \bar{4} & \overline{56} & \bar{\mathbf{2}} \end{array}$$

und schließlich Nr. 11:

$$\begin{array}{lrr} 1 & \bar{7} & \mathbf{4} \\ \bar{2} & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \bar{4} & \overline{28} & \mathbf{1}. \end{array}$$

1) Daß Peet dieser Zusammenhang gänzlich entgangen ist, beweist z. B. seine Bemerkung zu Nr. 13, wo er verlangt, man hätte 448 statt 28 als L.C.M. nehmen sollen!

Hier stehen jetzt genau diejenigen Hilfszahlen, die wir bei einem ursprünglichen Schema anzunehmen haben (vgl. S. 11). Damit ist also die Zusammengehörigkeit der Nummern 11, 12 und 14 neuerlich bewiesen und gezeigt, daß man wohl das Recht hat, in jeder der vorkommenden Rechnungen Hilfszahlen zu ergänzen. Dann sind aber auch Nr. 10 und 9 sogleich an ihren Platz zu setzen. Nr. 10 ist ein drittes Exemplar von Nr. 7, während Nr. 9 daraus durch Verdoppelung hervorgeht. Die hiermit erhaltene endgültige Anordnung habe ich auf Tafel III zusammengestellt.

Aber welches ist der Sinn dieser Tabelle? Gehen wir von der einfachsten dieser Rechnungen aus: Nr. 11. Hier ist das Prinzip der Rechnung und ihrer Hilfszahlen noch klar ersichtlich: es handelt sich um die Kombination von $\bar{7}$ mit $1+\bar{2}+\bar{4}$ oder, wenn wir uns des im vorigen Paragraphen Gesagten erinnern, gerade um die Berechnung des zur Zerlegung von 2/7 gehörigen Ergänzungstermes. Ich bezeichne daher unsere Tabelle als die „*Ergänzungstabelle*“ zu 2/7.

Mit dieser entscheidenden Bemerkung eröffnet sich uns ein erster Einblick in die tatsächliche Berechnung der $2/n$-Tabelle. Wie wir wissen, ist das zu 2/7 gehörige Hauptglied mit $\bar{4}$ zu bilden, während etwa das Rechnen mit $\bar{2}$ erfolglos bleiben muß. Die Entscheidung bringt der Ergänzungsterm; rechnet man mit $\bar{4}\cdot\bar{7}$ als Hauptglied, so ist dieser $(1+\bar{2}+\bar{4})\ \bar{7}$. Nr. 11 zeigt, wie die Addition der Hilfszahlen in dieser Rechnung eine Summe **7** (bezogen auf $\overline{28}$ als neue Einheit) ergibt, woraus folgt (vgl. § 4), daß $\bar{4}$, also ein Stammbruch, der Wert des Ergänzungsterms ist. Nun ist das Hauptglied leicht berechnet, in dem 1/4 von $\bar{7}$ gebildet wird, also zunächst 1/2, dann 1/4. Nr. 12 und 14 führen dies durch, indem dabei die ganze Ausgangsrechnung schematisch mitgeführt wird, was zwar wenig praktischen Wert hat, aber doch in jedem einzelnen Schritt das Resultat bestätigt. So ergibt sich die Zerlegung $\bar{4}+\overline{28}$. Aber damit ist dem Ägypter nicht genug. Ist $\bar{4}+\overline{28}$ „wirklich“ die Zerlegung von 2/7, so muß sich dies auch aus den Hilfszahlen ergeben, wie man sie verwenden müßte, wenn $\bar{4}+\overline{28}$ für sich addiert werden sollten. Dann muß also $\overline{28}$ die Hilfszahl **1** bekommen, $\bar{4}$ die Hilfszahl **7** wie es in Nr. 7 geschieht. Und nun wird die ganze Rechnung nochmal nach beiden Seiten mit diesen Hilfszahlen durchgeführt [1]), was selbstverständlich immer wieder die Zerlegung in Hauptglied und Ergänzungsterm $\bar{4}+(1+\bar{2}+\bar{4})$ erkennen läßt. Der Schlußeffekt liegt wohl in Nr. 9, wo sich 1 als Resultat der Vervierfachung der 1/7-Rechnung ergibt, während die Hilfszahlensumme **28** beträgt. Solche Hilfszahlenadditionen sind uns mehrmals erhalten; auf einen ganz ähnlichen Fall werden wir sogleich zu sprechen kommen.

Bevor ich mich dem restlichen Teil der *škm*-Rechnung zuwende, will ich auf diese Bezeichnung selbst eingehen. *škm* heißt etwa „voll machen“, „ergänzen“ und wird auch als mathematischer Terminus in dieser ursprünglichen Bedeutung gebraucht, z. B. in der „zweiten Gruppe“ von Ergänzungsrechnungen (Nr. 21 bis 23), wo etwa $\bar{3}+\bar{5}$ zu 1 „ergänzt“ werden soll. Nachdem wir die Beziehung der soeben besprochenen Rechnungen zur $2/n$-Zerlegung erkannt haben, zeigt sich, daß auch hier die Bezeichnung „Ergänzungsrechnung“ völlig berechtigt ist, handelt es sich ja doch hier gerade um die Bestimmung eines „Ergänzungstermes“ einer solchen Zerlegung: $1+\bar{2}+\bar{4}$ ergänzt das Hauptglied $\bar{4}$ zu 2. Wir sehen also hier bestätigt, daß sich die ägyptische Terminologie an den sachlichen Inhalt einer Rechnung anschließt, nicht aber an die spezielle mathematische Gestalt. Andererseits werden natürlich gerade durch solche Ausdrücke auch innere Beziehungen für uns erkennbar.

1) Man hat es also hier gewissermaßen mit einem Analogen zur zweimaligen Berechnung der Summe der „geometrischen Reihe“ in Nr. 79 zu tun.

Es bleibt noch übrig, die letzten der *śkm*-Rechnungen, d. h. die Nummern 8 und 16 bis 20 zu untersuchen. Ihre Anordnung zu einer Tabelle ist auf Grund ähnlicher Schlüsse, wie ich sie oben bei der 2/7-Ergänzungstabelle ausführlich dargelegt habe, leicht zu bewerkstelligen: ich habe das Resultat in Tafel III, 2 angegeben. Damit ist die „erste Gruppe" von *śkm*-Rechnungen des Papyrus Rhind gerade erschöpft.

Welche Bedeutung hat aber nun diese neue Tabelle? Die erste Schwierigkeit ist, daß $1+\overline{\overline{3}}+\overline{3}=2$ doch nicht in einem Ergänzungsterm für 2 auftreten kann. Ferner: Auf Grund des Hilfszahlensystems **1**, **2**, **3** von Nr. 18 hat man offenbar d i e s e Rechnung als Ausgangspunkt zu betrachten. Dort wird aber mit $\overline{6}$ gerechnet, also mit einem Bruch eines g e r a d e n Nenners, was wieder nicht zu einer $2/n$-Zerlegung passen will. Aber die Verwendung des Terminus *śkm* und die Analogie zur 2/7-Ergänzungstabelle lassen doch keinen Zweifel über eine Beziehung zur $2/n$-Tabelle. Und eine solche besteht in der Tat.

Die $2/n$-Tabelle selbst beginnt mit $\overline{\overline{3}}$, zerlegt diesen Bruch aber nicht weiter, sondern betrachtet ihn offenbar als selbständige Einheit; andrerseits ist die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ eine in der ganzen ägyptischen Mathematik immer verwandte Zerlegung, auf die wir auch noch zurückkommen werden. Schließlich ist die Reziprozität zwischen $\overline{\overline{3}}$ und $1+\overline{2}$ eine wohlbekannte, wie viele Beispiele beweisen[1]).

Wir betrachten nun den Fall einer $2/n$-Zerlegung, wo mit $\overline{2}$ im Hauptglied, also mit $1+\overline{2}$ im Ergänzungsterm gerechnet wird. Dann muß, damit die Zerlegung funktioniert, $\frac{1+\frac{1}{2}}{n}$ ein Stammbruch werden oder, ägyptisch aufgefaßt: es muß sich $\overline{n}$ in die Form $\overline{\overline{3}}\cdot\overline{m}$ setzen lassen; und $n=9$ ist, wie wir wissen, die erste Zahl, die (nach 3) hierfür in Frage kommt (Tafel II, Fall I, 1). Nimmt man noch die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ hinzu, so entpuppt sich schließlich unsere Tabelle als eine zur Zerlegung von 2/9 gehörige Ergänzungstabelle, ganz ähnlich der zu 2/7, nur in etwas anderer Form geschrieben.

Nr. 18 handelt von $\overline{6}$, d. h. von dem Ergänzungsterm der Zerlegung $2/9 = 1/18 + 1/6$ und als zweites Element findet sich $2/3 \cdot 1/6 = 1/9$, d. h. gerade die entscheidende Relation, natürlich in ägyptischer Art als Verifikation der Behauptung geschrieben. Welchen Sinn die Ausdehnung der Rechnung auf $\overline{3}$ hat, zeigen die Hilfszahlen, die dann in der Ausgangsrechnung die g a n z z a h l i g e Folge **1**, **2**, **3** durchlaufen; doch will ich hierauf erst in § 4 zurückkommen, um hier nicht allgemeine Erörterungen einschalten zu müssen. Einstweilen dürfen wir also die dritte Zeile einfach beiseite lassen.

Nun ergibt sich auch die Bedeutung der übrigen Rechnungen ganz nach dem Muster der Tabelle zu 2/7. Die Verifikation der Rechnung und ihrer Hilfszahlen benützt die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$, wobei wieder die Rechnungen als Ganzes entsprechend transformiert werden, was die Hilfszahlen deutlich erkennen lassen. Zunächst Nr. 16 als „1"; daraus abgeleitet Nr. 8 für 1/2; dann Nr. 19 für 1/6 (die Summen dienen ja geradezu als Nummerierung) und durch Zusammenfassung Nr. 17 für 2/3, woraus nun wieder alles dyadisch abgeleitet werden kann: 2/3, 1/3, 1/6 und sogar noch 1/12, das hier wohl nur diesem Schema seine Existenz verdankt. Überall ist die $\overline{3}$-Zeile die entscheidende, und sie gerade enthält die Zerlegung $\overline{6}+\overline{18}$ als solche. Sobald man sich etwas übt, in einem solchen Schema zu lesen, bemerkt man überall die schönsten derartigen Beziehungen. Daß gerade s i e der Ägypter gesehen hat, ist mir kein Zweifel; so ist es auch wohl kein Zufall, daß in Nr. 8 die Summe der Hilfszahlen gebildet wird, was eben die **9** ergibt, um die es sich hier überhaupt handelt. Man könnte diese ganze Art des Rechnens fast der Freude an Wortspielen in Parallele

1) Z. B. bei 2/21, 2/27, 2/33 usw.

setzen, die aus der übrigen ägyptischen Literatur wohlbekannt ist; heute würde man allerdings solche Rechnungen etwas prosaischer als bloße Identitäten bezeichnen.

Damit verlasse ich die „erste Gruppe der *śkm*-Rechnungen". Es folgt ihr jene zweite Gruppe, die ich schon erwähnt habe, weil sie den Grund ihrer Benennung noch unmittelbar erkennen läßt; sie gehört aber nicht mehr zum Gebiet der $2/n$-Tabelle. Dagegen wird man vielleicht annehmen dürfen, daß „Ergänzungstabellen", wie wir sie hier für 2/7 und 2/9 festgestellt haben, auch noch für die übrigen Zerlegungsschemata (vgl. Tafel II) bestanden haben. Sie sind nun für uns, wenigstens prinzipiell, leicht rekonstruierbar.

§ 4. Das Rechnen mit Brüchen.

Bevor ich mich dem restlichen Teile der $2/n$-Tabelle zuwende, will ich hier einige Bemerkungen über das Rechnen mit Brüchen und Hilfszahlen einschalten, wie es den „Ergänzungsrechnungen" zu Grunde liegt und dann sogleich für die Behandlung der Ausnahmezahlen von Bedeutung werden wird.

Ich erinnere zunächst an die b e g r i f f l i c h e Grundlage des Rechnens mit Brüchen, wie ich es schon oben dargelegt habe: die Auffassung der ursprünglich vorhandenen natürlichen Brüche als Individuen, die Objekte des Zählens werden. Die Anpassung an die Rechnung führt dann zu den algorithmischen Brüchen; die fortgesetzte Ausdehnung dieses Bereiches durch Bildung von Bruchteilen eines Bruches — oder kurz die „multiplikative" Verknüpfung von Stammbrüchen — ist ohne weiteres ausführbar, da legt schon die Schrift das richtige Verfahren an die Hand. Aber lassen sich nicht auch Summen von Brüchen zu neuen Gruppen zusamenziehen, so wie aus ||||| und |||| und | ein neuer Komplex ∩ (10) wird?

Keine Schwierigkeiten bieten die Fälle, wo gleiche Stammbrüche nebeneinander stehen: entweder sie sind zurückführbar auf einen Stammbruch in höheren Einheiten (Teilbarkeit des Nenners) oder gar auf $1=\frac{n}{n}$ oder aber man hat die „trivale" Darstellung $\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$ mit der sich als solcher nichts anfangen läßt. Aber es gibt Fälle, wo sich auch eine Reihe einzelner verschiedener Brüche zu einem neuen Individuum zusammenfassen lassen, z. B. dann, wenn sich der eine Bruch in das „Zahlensystem" (oder besser „Zählsystem") des andern unmittelbar eingliedern läßt. Dann bewegt man sich wieder völlig im Gebiete der n-tel und kann dann unter Umständen wie im trivialen Falle reduzieren. Dies festzustellen ist der Zweck der Hilfszahlen. Dabei ist also naturgemäß der kleinste Bruch mit **1** zu bezeichnen. Dann hat man einfach diese Hilfszahlen zu addieren und nachzusehen ob eine Reduktion durchführbar ist, was unmittelbar durch dyadische Multiplikation feststellbar ist. Ein Schema wie

$$\begin{array}{ccc} 1 & \overline{7} & \mathbf{4} \\ \overline{2} & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \overline{4} & \overline{28} & \mathbf{1} \end{array}$$

läßt sofort erkennen, daß die Gesamtzahl der Achtundzwanzigstel gleich 7 ist, und daß diese zusammen gerade 1/4 ergeben, ist wieder aus der Rechnung ersichtlich, denn 1/28 ist danach 1/4 von einem Siebentel der Einheit der ganzen Zahlen, so daß 7 solche gerade ein Viertel der Einheit bilden. Ein solcher Schluß beruht im Grunde nur auf dem klaren Bewußtsein, daß n n-tel die Einheit wieder voll machen[1]). Wie der Kern der ägyptischen „Division" in ihrer multiplikativen (d. h. additiv

1) Ganz ähnliche Überlegungen bilden die Grundlage des Verfahrens zur „Auflösung linearer Gleichungen", wie es im Pap. Rhind aber auch in den Kahun-Papyri (Griffith [4]) vorkommt.

ausführbaren) Umkehrung liegt, so ruht auch die Bruchrechnung auf der umgekehrt laufenden, dafür aber ganzzahligen Reihe der Hilfszahlen.

Der Hilfszahlenalgorithmus ist in der beschriebenen Weise immer leicht durchführbar und in bestem Anschluß an das Rechnen mit ganzen Zahlen, so lange nur die 1/2-Reihe in den Kennziffern zur Anwendung kommt. Aber bei dem Bruche $\overline{\overline{3}}$, dem doch auch eine individuelle Bedeutung in der Menge der natürlichen Brüche zukommt, ist die Hilfszahlen-Methode ihres Fundamentes, der Möglichkeit des Abzählens, beraubt: 1 läßt sich nicht mehr in 2/3-teln auszählen. Aber hier kommt wieder der Ursprung dieses Bruchbegriffes zur Geltung, nämlich daß $\overline{\overline{3}}$ ein durch Verdoppelung aus $\overline{3}$ abgeleiteter Bruch ist (vgl. § 1). Also erhält $\overline{\overline{3}}$ gegenüber $\overline{3}$ die Hilfszahl $\mathbf{2}$; 1 aber $\mathbf{3}$. Es ist also alles wieder dadurch auszählbar geworden, daß $\overline{\overline{3}}$ sozusagen in das Zählsystem von $\overline{3}$ „eingebettet" wurde. Das Schema $1 \to \overline{\overline{3}} \to \overline{3}$ und die Hilfszahlen $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3}$ entsprechen einander ebenso (gegeneinander laufend!), wie dyadisch Halbieren und Verdoppeln[1]). Es ist nur die Durchführung dieses Gedankens, die uns in der Dreizeiligkeit der 2/9-Ergänzungstabelle im vorigen Paragraphen begegnet ist.

Von dieser Grundlage aus werden nun kompliziertere Rechnungen abgeleitet: Rechnung, Hilfszahlen und Resultat werden als Ganzes dem dyadischen Algorithmus unterworfen, wie wir es ja deutlich im vorigen Paragraphen verfolgen konnten. Die Ausführbarkeit der einfachen Ausgangsrechnung überträgt sich damit auf schwierigere Fälle, bloß durch Halbieren und Verdoppeln.

Durch diese Betrachtungen erledigt sich ganz von selbst die Frage, ob die Ägypter Brüche mit Hilfe eines „gemeinsamen Nenners" addiert hätten. Es ist wohl jetzt klar, daß davon keine Rede sein kann, daß die Bedeutung der Hilfszahlen keine multiplikative ist, sondern daß sie unmittelbar auf das Fundament aller ägyptischer Mathematik, das Zählen, zurückgehen[2]). Damit löst sich auch das Paradoxon, daß es einerseits dem Ägypter nicht möglich gewesen sein soll, mit Zahlen größer als 2 direkt zu multiplizieren, er aber andrerseits Bruchadditionen ausführen konnte, die auch uns noch recht unbequem werden und zwar mit „gemeinsamen Nennern", die ihrerseits Aggregate von Brüchen als Multiplikatoren benützen. So müßte man z. B. in Nr. 15 annehmen, daß der Ägypter berechnen konnte, daß sich $\frac{1}{128}$ zu $\frac{1}{896}$ verhält wie $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ zu $\frac{1}{32}$, und dieses, ohne gemischte Brüche verwenden zu dürfen! Wie viel einfacher es tatsächlich zugegangen ist, lehrt ein Blick auf Tafel III. Wir sehen jetzt wie der Unterschied zwischen „natürlich" und „algorithmisch" ganz wesentlich in die gesamte ägyptische Mathematik eingreift.

Das Rechnen mit den Hilfszahlen hat demnach ursprünglich nur dann Sinn, wenn ihre Reihe mit $\mathbf{1}$ beim kleinsten vorkommenden Bruche beginnt. Die Addition von Brüchen wird insbesondere dann durchführbar, wenn die Summe der Hilfszahlen dem Nenner dieses kleinsten Bruches gleich wird, d. h. wenn es sich um n n-tel handelt[3]). So sehen wir auch z. B. in Nr. 21 (und 22) vorgegangen, wo $\overline{15}+\overline{\overline{3}}$ zu 1 zu ergänzen ist. Man geht aus von den Hilfszahlen $\mathbf{1}+\mathbf{10}$, so daß noch 4 Fünfzehntel zu ergänzen sind; dies wird dann an den gefundenen Zahlen nachgewiesen.

Von diesen einfachsten Anfängen aus läßt sich leicht das Operieren mit Hilfszahlen ausgestalten. Den Ausgangspunkt bilden immer die Rechnungen mit ganzen Hilfszahlen; durch das Verfahren des Übertragens ganzer Rechnungen gelangt man zu neuen Brüchen, denen nun auch gebrochene Hilfszahlen zugehören können. Andrerseits gibt die Methode der „Einbettung", wie wir

1) Dies liefert wohl auch den Grund für die merkwürdige Gewohnheit, $\overline{\overline{3}}$ durch den Umweg über $\overline{3}$ zu berechnen.

2) Rein äußerlich kann dies allerdings manchmal mit unserem Verfahren des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners übereinstimmen. — In [1] habe ich diesen Sachverhalt noch nicht durchschaut.

3) Der Wert dieser Hilfszahlen ist ohne Weiteres durch Rückwärtsdurchlaufen der gewöhnlichen Kennziffern-Rechnung zu erhalten.

es für $\overline{\overline{3}}$ und $\overline{3}$ kennen gelernt haben, die Möglichkeit von gebrochenen Hilfszahlen wieder zu ganzen zurückzukommen, wobei dann allerdings die $\mathbf{1}$ als Anfangsglied nicht mehr in der Rechnung selbst vorzukommen braucht. Der Erfolg eines solchen verwickelten Algorithmus läßt natürlich leicht den eigentlichen Ausgangspunkt vergessen; der Gegensatz zwischen „natürlich" und „algorithmisch" vertieft sich zu dem zwischen Idee und Methode, wie ihn uns die Geschichte der Mathematik immer wieder vor Augen führt.

Ich will hier darauf verzichten, diesen Prozeß an einzelnen Beispielen zu verfolgen, da ich hierauf in einer zweiten Arbeit eingehen werde, während dies für die Grundlagen der Bruchrechnung nicht von Bedeutung ist. Ich will nur bemerken, daß die Wahl der neuen Einheit, auf welche die Hilfszahlen bezogen werden, meist aus der ersten (zur Kennziffer 1 gehörigen) Zeile erkennbar ist und dort dem Prinzip folgt, zunächst dem kleinsten Bruch die Hilfszahl $\mathbf{1}$ zuzuweisen oder doch eine solche, daß diese Zeile durchgehends ganze Hilfszahlen erhält. Das Bestimmen der weiteren Hilfszahlen ist dann ein Leichtes; ist z. B. $\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{45} \\ \overline{45} & \mathbf{1} \end{array}$ das Ausgangsschema, so erhält $\overline{8}$ nach dyadischem Verfahren

$$\begin{array}{ll} 1 & \mathbf{45} \\ \overline{2} & \mathbf{22}+\overline{\mathbf{2}} \\ \overline{4} & \mathbf{11}+\overline{\mathbf{4}} \\ \overline{8} & \mathbf{5}+\overline{\mathbf{2}}+\overline{\mathbf{8}} \end{array}$$

die Hilfszahl $\mathbf{5}+\overline{\mathbf{2}}+\overline{\mathbf{8}}$ (vgl. Nr. 23[1])). Alles dies ist nur eine Ausdehnung jener einfachsten Methode, die ich oben als „Einbettung" bezeichnet habe. Mit einem Beziehen von 1/8 auf einen Nenner 1/45 hat dies aber nichts zu tun; für den Ägypter ist es nicht mehr als eine geschickte Anwendung seiner gewohnten dyadischen Methode.

§ 5. Die Ausnahmezahlen.

Wir wenden uns wieder der $2/n$-Tabelle zu. In § 2 haben wir gesehen, wie eine Zerlegung von Brüchen der Form $\frac{2}{n}$ in Stammbrüche dadurch möglich wird, daß die natürlichen Brüche und ihre einfachsten Kombinationen an die Stelle ganzzahliger Koeffizienten treten. Der entscheidende Punkt für das Funktionieren dieser Methode lag dann in dem Verhalten des zugehörigen „Ergänzungsterms". In § 2 hatten wir diese Frage der Kürze halber durch Teilbarkeitseigenschaften entschieden — jetzt müssen wir zusehen, wie sie sich für den Ägypter beantworten ließ.

Hier sind es nun gerade die Hilfszahlen, die uns den richtigen Weg weisen. Die zu 2/7 oder 2/9 gehörigen Ergänzungsrechnungen zeigen ganz deutlich, wie man aus ihnen unmittelbar den Stammbruchcharakter des Ergänzungstermes ablesen kann, indem in den Ausgangsrechnungen Nr. 11 bezw. 18 die Hilfszahlensumme dem Nenner gleich wird. Daß man gerade diese Art des Ergänzens auch in viel komplizierteren Fällen anzuwenden wußte, zeigt z. B. die „Ergänzungsrechnung"[2]) aus Nr. 37, wo

$$\begin{array}{lcr} \overline{2}+\overline{4}+\overline{8}+\overline{72}+\overline{16}+\overline{32}+\overline{64}+\overline{576} & \qquad & \text{Summe } \overline{8} \\ \qquad\qquad\quad \mathbf{8} \quad \mathbf{36} \quad \mathbf{18} \quad \mathbf{9} \quad \mathbf{1} & & \mathbf{72} \end{array}$$

gebildet ist. Es wird also nachgewiesen, daß die Summe der fünf letzten Brüche gerade $\overline{2}+\overline{4}+\overline{8}$ zu 1 ergänzt d. h. gleich $\overline{8}$ ist. Dies ergibt sich aber leicht aus den Hilfszahlen, denn ihre Summe ist $\mathbf{72}$ und da $\mathbf{8}$ zu $\overline{72}$ gehört, so ghört zu $\mathbf{72}$ der Bruch $\overline{8}$, einfach auf Grund des Gegeneinanderlaufens von Kennziffern und Hilfszahlen.

1) Nr. 23 ist übrigens offensichtlich keine ursprüngliche Rechnung, sondern hängt mit Nr. 21 und 22 zusammen.

2) Sie ist dort ausdrücklich so genannt. Vgl. Peet [1], S. 74, Anm. 2.

Läßt sich eine bestimmte $2/n$-Zerlegung einmal durchführen, so folgen hieraus nach dem Übertragungsprinzip sofort eine Reihe weiterer Zerlegungen für die Vielfachen dieses Nenners, wobei auch die Hilfszahlen mitgenommen werden, so daß auch dann die richtigen Hilfszahlensummen im Ergänzungsterm erscheinen. Wir werden also annehmen können, daß die Zerlegung von $2/n$ sehr bald als ein auf die Hilfszahlen des Ergänzungstermes bezügliches Problem erkannt wird.

Rekonstruiert man sich demgemäß die Hilfszahlen für die Ergänzungsterme der $2/n$-Tabelle, so bestätigt sich sofort, daß man aus ihnen den Stammbruchcharakter dieser Ausdrücke erkennen kann. Dabei ist aber von Bedeutung, daß dies nicht nur für die schon behandelten Zahlen gilt, sondern vor Allem auch für die „Ausnahmezahlen“[1]).

Ich beginne mit 2/43. Im Ergänzungsterm wird mit $1 + \overline{42}$ operiert, wozu eine Hilfszahlensumme $\mathbf{42} + \mathbf{1} = \mathbf{43}$ gehört, so daß als Ergänzungsterm $\overline{43}\ (1 + \overline{42})$ offenbar ein Stammbruch (nämlich $\overline{42}$) erscheint. Es ist also jetzt der Ergänzungsterm der Ausgangspunkt der Rechnung und das Problem besteht in der Auffindung eines zugehörigen Hauptgliedes. Wir lassen aber zunächst diese Frage beiseite und bestimmen die Hilfszahlen für die übrigen Ausnahmezahlen, nach dem Prinzip, daß Hilfszahlen in ursprünglichen Rechnungen immer ganzzahlig sein müssen. Wie wird 2/61 zu zerlegen sein? Dyadisch wird 61 durch $40 + 20 + 1$ ausgedrückt. Soll also die Hilfszahlensumme im Ergänzungsterm genau **61** sein — dann erhält man nämlich einen Stammbruch — so entspricht den Hilfszahlen $\mathbf{40} + \mathbf{20} + \mathbf{1}$ ein Ergänzungsterm mit $1 + \overline{2} + \overline{40}$, wie es in der Tat in der $2/n$-Tabelle geschieht. Der Wert des Ergänzungsterms selbst ist dann natürlich $\overline{40}$.

Hieran schließen sich die beiden nächsten Ausnahmezahlen 67 und 71 mit den unmittelbar verständlichen Ergänzungstermen

67	$1 + \overline{2} + \overline{8} + \overline{20}$	
	40 20 5 2	Summe **67**
71	$1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{40}$	
	40 20 10 1	Summe **71**.

Auch die nächsten vier Ausnahmezahlen d. h. 73, 79, 83, 89 sind nach einem hier anschließenden Schema behandelt, nur daß jetzt von **60** statt von **40** ausgegangen ist; in Tafel IV, 2 sind diese Zerlegungen zusammengestellt. Die Hilfszahlensumme der Ergänzungsterme läßt sofort den Aufbau dieses Bestandteiles der Zerlegung erkennen.

Wie steht es aber nun mit den zugehörigen Hauptgliedern? Entsprechen z. B. bei 2/61 dem Bruche $\overline{40}$ die Hilfszahl **1** und wird **61** durch $\mathbf{40} + \mathbf{20} + \mathbf{1}$ zusammengesetzt, so lautet nach dem Grundgedanken des Hilfszahlenrechnens der Ergänzungsterm einfach $\overline{40}$, da 61 Vierzigstel vorhanden sind. Da nun einmal im Gebiet der Vierzigstel gerechnet wird, so muß der Koeffizient des Hauptgliedes so bestimmt werden, daß er mit dem Ergänzungsterm zusammen $2 . 40 = 80$ Vierzigstel ergibt; d. h. es müssen im Hauptglied noch $80 - 61 = 19$ von ihnen aufgebracht werden, oder m. a. W. die Hilfszahlensumme soll **19** werden. Das ägyptische Schema für eine solche Aufgabe ist aber leicht rekonstruierbar: wir müssen nur versuchen mit möglichst einfachen dyadischen Rechnungen zu Rande zu kommen. So bildet man zunächst

1	**40**
$\overline{2}$	**20**
/ $\overline{4}$	**10**
/ $\overline{8}$	**5**

wo es mit ganzen Hilfszahlen ein Ende hat. Die beiden letzten Glieder liefern schon **15**, also fehlen noch **4**, die sich selbstverständlich aus

1) Sie sind auf Tafel IV, 1 nochmals zusammengestellt.

1	**40**
/ $\overline{10}$	**4**

ergeben. Also ist $\overline{4} + \overline{8} + \overline{10}$ als Hauptglied brauchbar; und so steht es auch tatsächlich in der $2/n$-Tabelle.

Ich habe diese Überlegungen absichtlich in der schwerfälligen ägyptischen Ausdrucksweise durchgeführt, weil sich ganz analoge Schlußreihen in der sogenannten „Hau-Rechnung“ (*ʿḥʿ*) finden, die von Peet ausführlich in seinem Kommentar zu den Nummern 24 bis 38 des Papyrus Rhind behandelt ist[1]). In moderner Sprechweise heißt unser Problem einfach so: ist b der „gemeinsame Nenner“ des Ergänzungsterms, so soll auf Grund der Relation

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\,b - n}{b} + \frac{n}{b}\right)$$

$\frac{2\,b - n}{b}$ durch Stammbrüche ausgedrückt werden. Wie diese Aufgabe gelöst wird, haben wir eben für $n = 61$, $b = \mathbf{40}$ gesehen. Für $n = 67$ gilt es, von $b = \mathbf{40}$ ausgehend, $2\,b - n = \mathbf{80} - \mathbf{67} = \mathbf{13}$ zusammenzusetzen, was unmittelbar dadurch geschehen kann, daß man die letzte Hilfsrechnung noch um eine Zeile erweitert[2])

1	**40**
$\overline{10}$	**4**
$\overline{5}$	**8**

und $\underset{\mathbf{5}}{\overline{8}} + \underset{\mathbf{8}}{\overline{5}}$ zusammennimmt. Schließlich verlangt $n = 71$ ein Hauptglied mit der Hilfszahlensumme $\mathbf{80} - \mathbf{71} = \mathbf{9}$ d. h. den Ausdruck $\underset{\mathbf{5}}{\overline{8}} + \underset{\mathbf{4}}{\overline{10}}$.

Ganz entsprechend erhält man die Hauptglieder für $n = 73, 79, 83, 89$ mit Hilfe der auf $b = \mathbf{60}$ bezüglichen Nebenrechnungen

1	**60**	1	**60**	1	**60**
$\overline{2}$	**30**	$\overline{10}$	**6**	$\overline{\overline{3}}$	**40**
$\overline{4}$	**15**	$\overline{5}$	**12**	$\overline{3}$	**20**
				$\overline{6}$	**10**

die folgendermaßen zusammenzufassen sind

n	$2b - n$	Zusammensetzung	Hauptglied
73	$\mathbf{120 - 73 = 47}$	$\mathbf{47 = 15 + 12 + 20}$	$\overline{4} + \overline{5} + \overline{3}$
79	$\mathbf{120 - 79 = 41}$	$\mathbf{41 = 15 + 6 + 20}$	$\overline{4} + \overline{10} + \overline{3}$
83	$\mathbf{120 - 83 = 37}$	$\mathbf{37 = 15 + 12 + 10}$	$\overline{4} + \overline{5} + \overline{6}$
89	$\mathbf{120 - 89 = 31}$	$\mathbf{31 = 15 + 6 + 10}$	$\overline{4} + \overline{10} + \overline{6}$

Tafel IV lehrt, daß das Resultat dieser hypothetischen Rechnungen mit den Tatsachen übereinstimmt.

Ganz ähnlich sind noch $n = 31$ und $n = 47$ und 53 zu behandeln. Der Ergänzungsterm für $n = 31$ lautet $1 + \overline{2} + \overline{20}$; also ist $2b - n = 9$, was mit Hilfe von

1) Peet [1], S. 60 ff.

2) Diese Reihenfolge zur Bildung von $\overline{5}$ folgt z. B. aus Pap. Rhind Nr. 1 bis 6. Ich werde speziell hierauf in einer folgenden Arbeit im Einzelnen eingehen.

1	**20**	1	**20**
$\overline{2}$	**10**	$\overline{10}$	**2**
/ $\overline{4}$	**5**	/ $\overline{5}$	**4**

sofort auf das Hauptglied $\underset{\mathbf{5}}{\overline{4}}+\underset{\mathbf{4}}{\overline{5}}$ führt. Entsprechend gilt:

n	Ergänzungsterm	$2b-n$
47	$\underset{\mathbf{30}}{1}+\underset{\mathbf{15}}{\overline{2}}+\underset{\mathbf{2}}{\overline{15}}$	**13**
53	$\underset{\mathbf{30}}{1}+\underset{\mathbf{20}}{\overline{\overline{3}}}+\underset{\mathbf{3}}{\overline{10}}$	**7**

Die Hauptglieder bestimmen sich aus

1	**30**	1	**30**
$\overline{10}$	**3**	$\overline{3}$	**10**
		$\overline{6}$.	**5**

bzw. aus

1	**30**	1	**30**
$\overline{2}$	**15**	$\overline{15}$	**2**

zu $\underset{\mathbf{3}}{\overline{10}}+\underset{\mathbf{10}}{\overline{3}}$ bzw. $\underset{\mathbf{5}}{\overline{6}}+\underset{\mathbf{2}}{\overline{15}}$.

Und schließlich noch $n = 43$, wovon wir ausgegangen waren. Hier ist $2b-n = 2 \cdot 42-43 = 41$. Also haben wir **41** in Zweiundvierzigsteln auszudrücken, was auf die Hilfsrechnungen führt

1	**42**	1	**42**	1	**42**
/ $\overline{2}$	**21**	/ $\overline{3}$	**14**	/ $\overline{7}$	**6**
		$\overline{6}$	**7**		

d. h. das Hauptglied $\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$ liefert.

Man wird von selbst zu diesen Hilfsrechnungen geführt, wenn man zunächst mit dem dyadischen Schema beginnt und dieses so weit fortsetzt, bis gebrochene Hilfszahlen auftreten müßten; der noch zu ergänzende Rest ergibt sich dann leicht hieraus. Auch hier dient also das dyadische Prinzip dazu, aus der Fülle der Möglichkeiten bestimmte Zerlegungen herauszugreifen. Nirgends hatten wir explizite Addition von Brüchen anzunehmen; allein das dyadische Rechenschema ist imstande alle Zerlegungen zu liefern und so automatisch zu Ausdrücken zu gelangen, deren direkte Überprüfung die Kräfte der ägyptischen Mathematik weit übersteigen würde.

Von den 15 Ausnahmezahlen sind jetzt 11 erledigt. Für sie alle war der Gedanke maßgebend, den Ergänzungsterm der Zahl n anzupassen und danach das zugehörige Hauptglied zu bestimmen.

Zu den noch übrig bleidenden vier Ausnahmezahlen gehören zwei (35, 91), die sich bereits dem Zerlegungsverfahren aus § 2 hätten fügen müssen. Sie sind also jetzt wirkliche Ausnahmen geblieben. Hierzu kommt noch 2/97, das sich nach der letzten Methode mit einem Ergänzungsterm $1+\overline{3}+\overline{6}+\overline{15}+\overline{20}$ und einem Hauptglied $\overline{3}+\overline{20}$ zerlegen ließe, und 2/59 etwa mit $1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{5}$ und $\overline{30}$. Woher die tatsächlich vorgenommenen Zerlegungen dieser vier Zahlen stammen, kann ich nicht sagen. 35 und 91 zeigen schon dadurch ein ganz irreguläres Verhalten, daß sie die beiden einzigen Zahlen sind, die im Hauptglied $\overline{\overline{3}}$ enthalten, was ja im allgemeinen unsinnig ist, und nur

in diesen speziellen Fällen möglich ist[1]). Auch die Ergänzung von Hilfszahlen, selbst wenn ihre Summe gleich n ist, hilft nicht weiter.

Wir haben nun sämtliche Zerlegungen der $2/n$-Tabelle behandelt und konnten sie bis auf vier Ausnahmen in einfache Schemata einordnen. Bevor ich in § 7 nochmals auf die Entstehung der gesamten $2/n$-Tabelle zurückkomme, will ich im folgenden Paragraphen noch eine weitere Gruppe von Rechnungen des Papyrus Rhind besprechen, welche für die Grundlagen der Bruchrechnung von gewisser Bedeutung sind.

§ 6. Die 2/3-Tabelle.

Die Rechnungen Papyrus Rhind No. 61 und 61b sind bisher nur wenig beachtet worden[2]). No. 61 gebe ich auf Tafel VI nochmals wieder, No. 61b[3]) enthält in Worten die Regel zur Zerlegung von $\overline{\overline{3}}$ in $\overline{2}+\overline{6}$, No. 61 dagegen verschiedene Rechnungen mit $\overline{\overline{3}}$.

Rein äußerlich zerfällt diese „2/3-Tabelle" in drei Teile, in denen der Text verschieden gestaltet ist, was ich auch in Übersetzung und Anordnung in Tafel VI zum Ausdruck zu bringen versucht habe[4]). Wir werden sogleich sehen, daß diese Unterschiede auch inhaltlich erkennbar sind.

Die Grundlage bildet die Regel $\overline{\overline{3}} = \overline{2}+\overline{6}$, welche ja mit dem Zerlegungsschema der $2/n$-Tabelle übereinstimmt (vgl. § 2). Sie wird nicht näher begründet und bildet wohl eine der ältesten Regeln der Bruchrechnung überhaupt. Unmittelbar ergibt sich nach dieser Vorschrift die Zerlegung für 2/3 von 1/3 als $\overline{6}+\overline{18}$ (Zeile 3) und hieraus nach dem dyadischen Verfahren einerseits Zeile 1: 2/3 von 2/3 ist $\overline{3}+\overline{9}$, andrerseits Zeile 4: 2/3 von $\overline{6}$ ist $\overline{12}+\overline{36}$. Hier zeigt sich wieder der rein schematische Charakter des ägyptischen Rechnens, denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$ bedürfte garnicht einer Stammbruchzerlegung $\overline{12}+\overline{36}$[5]). Dazu kommt noch 1/3 von 2/3 wohl nur aus alter Gewohnheit der Reihenfolge $\overline{\overline{3}} \rightarrow \overline{3}$. Es ist also bisher $\overline{\overline{3}}$ mit $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ kombiniert, d. h. mit den natürlichen Brüchen der 1/3-Reihe, denen man höchstens noch $\overline{12}$ hinzufügen möchte, was auch zum weiteren Verlauf der Tabelle durchaus passen würde. Wir haben also bisher die Tabelle[6])

Zeile 1	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{\overline{3}}$ ist $\overline{3}+\overline{9}$
Zeile 2 und 3	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{3}$ ist $\overline{6}+\overline{18}$
Zeile 4	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{6}$ ist $\overline{12}+\overline{36}$.

Die Fortsetzung bildet Zeile 5 bis 8. Hier wird nun die 1/3-Reihe mit der 1/2-Reihe kombiniert, d. h. eigentlich nur mit $\overline{2}$ selbst; alles Weitere ist dyadisch unmittelbar erhältlich.

1) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{35} = \frac{5}{6 \cdot 35} = \frac{1}{42}$ und $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right)\frac{1}{91} = \frac{21}{30 \cdot 91} = \frac{1}{10 \cdot 7} = \frac{1}{70}$. Die Zerlegung von 2/35 ist an und für sich einfach genug und ganz verständlich. Aber schon der alte Schreiber hat sich vielleicht nicht ganz sicher gefühlt und Hilfszahlen hinzugefügt, die einzigen, die explizite in diesem Teile her $2/n$-Tabelle vorkommen (vgl. Peet [1], S. 41).

2) Eisenlohr [1], S. 150; Griffith [1], Bd. 16, S. 230 f. Ausführlicher Peet [1], S. 103 f., der vor allem auf die äußeren Ungleichmäßigkeiten der Tabelle hingewiesen hat.

3) Bei Eisenlohr im Text nicht besonders gezählt, in Tafel XIX mit a bezeichnet.

4) Ägyptisch heißt es: Zeile 1: $\overline{\overline{3}}$ *n* $\overline{\overline{3}}$ *m* $\overline{3}+\overline{9}$.
Zeile 5: $\overline{\overline{3}}$ *n* $\overline{2}$-*f* *m* $\overline{3}$.
Zeile 9: $\overline{9}$ $\overline{\overline{3}}$-*f* *m* $\overline{18}$ [+ $\overline{54}$].

5) Hieraus folgt, daß auch $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ nicht als $\frac{2}{9}$ der $2/n$-Tabelle entnommen ist, sondern für sich berechnet ist. — Man vgl. dagegen No. 18 (Tafel III, 2), woraus man neuerdings ersieht, daß es sich dort um keine abgeleitete Rechnung handelt.

6) Von genauer Wiedergabe der sprachlichen Eigentümlichkeiten sehe ich jetzt ab.

Zeile 5	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{3}$
Zeile 6	$\overline{3}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{6}$
Zeile 7	$\overline{6}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{12}$
Zeile 8	$\overline{12}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{24}$.

Es ist bemerkenswert, daß hier die Reihe bis $\overline{12}$ fortgesetzt wird in Übereinstimmung mit dem Ende der 1/3-Reihe in der $2/n$-Tabelle.

Zeile 9 bis 19. Nun wird schließlich die 1/3-Reihe mit den übrigen natürlichen Brüchen kombiniert, d. h. mit $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$. Dabei ist aber das Rechnen mit $\overline{10}$ als selbstverständlich beiseite gelassen. So ergibt sich, ausgehend von der 2/3-Regel, die folgende Tabelle, in der die Ergänzungen zerstörter Zeilen, im wesentlichen in Übereinstimmung mit Peet, durch [ ] angegeben sind:

Zeile 12	[$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{10}+\overline{30}$]
„ 13	[$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{20}+\overline{60}$]
„ 16	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{7}$ ist $\overline{14}+\overline{42}$
„ 9	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{18}+\overline{54}$
„ 10	[$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{36}+\overline{108}$]
„ 18	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{11}$ ist $\overline{22}+\overline{66}$.

Schließlich kommt noch die Verbindung dieser Brüche mit $\overline{2}$

Zeile 14	[$\overline{2}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{10}$]
„ 15	$\overline{4}$ von [$\overline{5}$] ist $\overline{20}$]
„ 17	$\overline{2}$ von $\overline{7}$ ist $\overline{14}$
„ 11	[$\overline{2}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{18}$]
„ 19	$\overline{2}$ von $\overline{11}$ ist $\overline{22}$.

Seitlich hinzugefügt sind dann noch in Zeile 18 bzw. 19 die direkten Resultate von $\overline{3}\cdot\overline{11}$ und $\overline{4}\cdot\overline{11}$ d. h. $\overline{33}$ bzw. $\overline{44}$[1]).

Diese ganze dritte Gruppe von Rechnungen zeigt also wesentlich denselben Typus wie die beiden vorangehenden, nur läßt man sich im allgemeinen damit genug sein, bloß die ersten Zeilen für 1/3- und 1/2-Reihe anzugeben, aus denen sich ja alles Weitere von selbst ergibt. No. 61 enthält also drei Tabellen: 1) Kombination der 1/3-Reihe mit sich selbst, 2) mit der 1/2-Reihe, 3) der 1/3 und 1/2-Reihe mit den übrigen natürlichen Brüchen.

Diese Art der Gruppierung äußert sich auch, wie schon bemerkt, im sprachlichen Ausdruck und zwar genau in Übereinstimmung mit der gegebenen Anordnung auf Grund des mathematischen Inhaltes. Demnach scheint mir eine Unterscheidung zwischen einer „korrekten" und einer „weniger korrekten" Sprechweise[2]), wie sie Peet macht, ganz überflüssig, zumal sie sich auch nicht anderweitig begründen läßt.

Wie sich diese Tabellen in ihrer jetzigen Form zusammengefunden haben, kann man natürlich nicht mehr sagen. Ich hielte es aber für möglich, daß sie tatsächlich auf verschiedene Quellen zurückgehen. Der Schreiber mag sich dann bemüht haben, sie äußerlich in Übereinstimmung zu bringen, gab aber das Radieren[3]) nach der zweiten Tabelle auf und merkte die Verbesserung nur mehr ganz generell in der ersten Zeile der dritten an.

1) Peet will noch ergänzen: in Zeile 16: $\overline{3}\cdot 7 = \overline{21}$ und in Zeile 17: $\overline{4}\cdot 7 = \overline{28}$.

2) „1/9 von 2/3 ist . . ." soll deshalb weniger korrekt sein, als „1/9, 2/3 von ihm ist . . ." weil der Ägypter nicht direkt durch 9 dividieren konnte. Aber jedes Kind weiß längst, was 1/4 von einem Apfel ist, bevor es durch 4 „dividieren" kann.

3) Vgl. Peet [1], Plate R. Note a.

Im Prinzip, d. h. aus mathematischen Gründen, wäre eine Tabelle, die Brüche mit Brüchen kombiniert, überflüssig, da dyadische Multiplikation und $2/n$-Tabelle bereits ausreichend wären. Der Ursprung dieser „2/3-Tabellen" liegt also wohl in der gegenständlichen Bedeutung der Brüche; für den Ägypter ist $\overline{\overline{3}}$ eine durchaus einheitliche Bruchgröße, der man ihren Zähler 2 nicht so anmerkt, wie bei unserer viel formaleren Schreibweise $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n} = \frac{2}{m}$. Es ist wieder der individuell-selbständige Charakter der natürlichen Brüche, der uns hier begegnet.

§ 7. **Zusammenfassung. Zur Entstehungsgeschichte der $2/n$-Tabelle.**

Die Bedeutung der 2/3-Tabelle liegt in ihrer Beziehung zu dem Ausgangspunkt unserer Untersuchung der Bruchrechnung, zu dem Unterschied zwischen natürlichen und algorithmischen Brüchen. Während die $2/n$-Tabelle das Gebiet der ganzen Zahlen mit dem der Brüche verbindet, schließt die 2/3-Tabelle den Kreis des Rechnens im Gebiet der Brüche selbst. Die ganze ägyptische Mathematik ruht auf zwei Pfeilern: den natürlichen Zahlen und den natürlichen Brüchen. Sie werden verbunden durch den dyadischen Algorithmus, der sein Fundament im Zählen findet.

Schon in § 1 habe ich darauf hingewiesen, daß das Gebiet der natürlichen Brüche vielleicht in $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{\overline{3}}$ einen ältesten Kern aufweist. Entsprechend könnte die Zerlegung von $\overline{3}$ in $\overline{2}+\overline{6}$ den Ausgangspunkt aller $2/n$-Zerlegungen gebildet haben; tatsächlich steht gerade diese außerhalb des gewöhnlichen Rahmens der $2/n$-Tabelle (sowohl des Pap. Rhind, wie der der Kahun Papyri), während $\overline{\overline{3}}$ in den Tabellen selbst als vollwertiger Stammbruch angesehen wird und nur mehr in ganz äußerlicher Weise dem Schema der $2/n$-Zerlegungen eingeordnet wird[1]).

Wird also der Fall $n = 3$ in der $2/n$-Tabelle, wie sie uns jetzt vorliegt, nur schematisch den übrigen Fällen angepaßt, so gehört doch die Zerlegung $\overline{\overline{3}} = \overline{2}+\overline{6} = (1+\overline{2})\ \overline{3}+\overline{2}\cdot\overline{3}$ jener wichtigen Gruppe von Zerlegungen an, die $\overline{2}$ als Hauptglied verwenden, und die, wie wir wissen, in allen jenen Fällen anwendbar sind, in denen n durch 3 teilbar ist. Untersucht man die Behandlung dieser Fälle im Pap. Rhind genauer, so zeigt sich, daß sich doch noch Unterschiede zeigen, die zwar nicht mathematisch begründet sind, dafür aber um so tiefer mit der historischen Entwicklung der ganzen $2/n$-Tabelle verknüpft sind. Ich verzichte darauf diese Untersuchung schrittweise vorzuführen, sondern gebe vielmehr nur ihr Resultat wieder, wie ich es schließlich nochmals in Form einer Tabelle (Tafel V) zusammenfasse.

I. Zerlegungen mit dem Hauptglied $\overline{2}$.

Allgemeine Voraussetzung ist hier: n durch 3 teilbar.

a) 2/3. Schematische Anpassung an das Folgende (vgl. oben).

b) 2/9. Hier kommt zuerst die Idee von der Zerlegung in Hauptglied und Ergänzungsterm zur Durchführung. Die Nebenrechnung zum Beweise der Zerlegung $\frac{2}{9} = \overline{6}+\overline{18}$ lautet

1	9		
$\overline{\overline{3}}$	6		
$\overline{3}$	3		
∕ $\overline{6}$	$1+\overline{2}$	∕ $\overline{18}$	$\overline{2}$

schließt also mit Angabe der Resultatwerte $\overline{6}$ und $\overline{18}$.

c) 2/15. Der Beweis von $\frac{2}{15} = \overline{10}+\overline{30}$ ist bereits zu

1) Vgl. S. 8 Anm. 3.

1	15			
$\diagup\ \overline{10}$	$1+\overline{2}$		$\diagup\ \overline{30}$	$\overline{2}$

verkürzt, schließt aber wieder mit $\overline{10}$ und $\overline{30}$.

Hiermit sind alle durch 3 teilbaren (ungeraden) Zahlen zwischen 1 und 15 umfaßt.

d) Volle Erfassung des Verfahrens. Es wird ausgedehnt bis $n = 87$, d. h. bis zur letzten durch 3 teilbaren (ungeraden) Zahl unter 90. Für dieses Stadium bildet also $90 = 3 \cdot 3 \cdot 10$ den natürlichen Endpunkt, nicht etwa 100, das mit der Grundeigenschaft der Teilbarkeit durch 3 nichts zu tun hat [1]).

Die Nebenrechnungen haben die Gestalt (z. B. für $n = 21$)

1	21				
$\diagup\ \overline{\overline{3}}$	14	$1+\overline{2}$	$\diagup\ 2$	42	$\overline{2}$

bezeichnen also nicht mehr die Resultatwerte [2]) ($\overline{14}$ und $\overline{42}$), sondern stellen die mathematisch bedeutsamen Größen $1+\overline{2}$ und $\overline{2}$ voran, wobei vor allem auch die Reziprozität von $\overline{\overline{3}}$ und $1+\overline{2}$ ausgedrückt wird.

Allen bisherigen Rechnungen ist die absolute Wortlosigkeit gemeinsam. Die Worte *njś* 2 *ḫnt* . . . und *sšm.t* (die Peet mit „Divide by . . . .“ und „Working out“ wiedergibt) sind nichts weiter als Kolumnentitel in der speziellen Anordnung des Papyrus Rhind (vgl. Eisenlohr [1], Tafel I bis VIII).

e) Ausdehnung der Tabelle von „90 bis 100“ (d. h. 91 bis 101), wodurch für unsere Zerlegung noch 93 und 99 hinzukommen (vgl. V b.).

II. $n = 5, 7, 11, 13$.

Es sind dies die noch nicht behandelten Zahlen zwischen 1 und 15. Die Nebenrechnungen sind vom Typus I b, d. h. sie schließen mit den Resultatziffern selbst und führen die ganze Rechnung explizite durch (7 und 11 sogar noch mit Angabe der gewöhnlichen Multiplikationen). Weiter fehlt jeder Text.

Fassen wir dies mit I a, b und c zusammen, so ergibt sich eine (wie man wohl sagen darf) älteste Reihe von Zerlegungen:

1) 2/3
2) 2/5, 2/7, 2/9, 2/11, 2/13
3) 2/15.

Ein Blick auf Tafel II lehrt: Es sind dies genau die Fälle, wo man entweder mit einem einfachen Hautglied $\overline{2}$, $\overline{4}$, ($\overline{8}$) und $\overline{3}$, $\overline{6}$ auskommt oder Elemente der 1/2-Reihe allein zu zweien zusammennimmt ($\overline{4}+\overline{8}$). Wir haben also für dieses Stadium $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$ und ($\overline{\overline{3}}$), $\overline{3}$, $\overline{6}$ als natürliche Brüche anzusehen und stehen noch ganz im Banne der einfachsten dyadischen Entwicklung, die nicht gerne 1/2- und 2/3-Reihe durcheinanderwirft. Die wichtigste Rolle spielt naturgemäß das Hauptglied $\overline{2}$. Zunächst wird 2/15 in die Tabelle einbezogen; dann aber erfolgt die Ausdehnung dieser Methode auf alle damit überhaupt faßbaren Zahlen bis 90 (I d).

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse zu bemerken, daß die erste Gruppe von *śkm*-Rechnungen (Nr. 7 bis Nr. 20), deren Zusammenhang mit der Zerlegung von 2/7 und 2/9 oben (vgl. § 3) dargelegt wurde, auch in ihre äußeren Form nicht die Zugehörigkeit zur $2/n$-Tabelle verleugnet. Abgesehen

1) Ich spreche natürlich nur der Kürze halber immer von „Teilbarkeit“. Wie sich dies für den Ägypter äußert, habe ich oben behandelt.

2) Ich unterscheide nicht zwischen Nebenrechnungen dieser Art und solchen vom Typus

1	27	
$\overline{\overline{3}}$	$\overline{18}$	statt 18.

Vgl. Anm. 1 von S. 8.

von der einen Überschrift *tp n śkm.t* („Example of completion“) enthalten diese Aufgaben keinerlei Text, sondern nur das Zeichen der Buchrolle für *dmḏ* „zusammen“, und unterscheiden sich dadurch sehr merkbar von den nachfolgenden Beispielen. Trotzdem wird man aber hieraus nicht ohne weiteres schließen dürfen, daß diese *śkm*-Tabellen genau derselben Entwicklungsphase angehören wie die bisher behandelten Zerlegungen. In der Tat wird man nicht in den Fehler verfallen dürfen, einfach aus der Zahl der Worte das Alter einer Rechnungsmethode bestimmen zu wollen. Nur das scheint mir gerechtfertigt, daß man diese *śkm*-Rechnungen bereits auf Grund ihrer äußeren Gestalt in eine Epoche verweist, die im Wesentlichen mit der Entstehungszeit der $2/n$-Tabelle zusammenfällt und wohl viel früher anzusetzen ist, als die Redaktion der übrigen Textaufgaben des Papyrus.

III. *ḏꜣ.t* und *dmḏ*.

Eine neue Gruppe von Rechnungen unterscheidet sich in doppelter Hinsicht von den bisherigen: einerseits wird die 2/3-Reihe der natürlichen Brüche um den Bruch $\overline{12}$ erweitert, andererseits wird nun mit der Anwendung zweifacher Hauptglieder Ernst gemacht. Dadurch erhält man einmal die Zerlegung von 2/23, dann (nach Tafel II, II) die von 2/17, 2/19, 2/37, 2/41 und (abgesehen von der zu $\overline{8}+\overline{12}$ gehörigen Ausnahmezahl 43) nur diese. Die Zusammengehörigkeit dieser Zerlegungen ist nun wieder äußerlich erkennbar. Genau bei 17, 19, 23, 37 und 41 tritt in den Rechnungen ein Terminus *ḏꜣ.t* d. h. „Rest“ auf und bei 19, 23, 41 auch noch das Zeichen der Buchrolle für *dmḏ* („zusammen“, Peet: „Total“), das man also füglich auch noch bei 17 und 37 wird ergänzen dürfen. Sowohl *ḏꜣt* wie Buchrolle treten nur bei den genannten Rechnungen auf, mit der einzigen Ausnahme $n = 53$. Während aber alle übrigen „*ḏꜣ.t*-Rechnungen“ darin übereinstimmen, daß ihre Nebenrechnungen ausführlich alle Zwischenglieder der Rechnung für 1, $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ bis zu $\overline{12}$ bezw. $\overline{24}$ vorführen, so enthält 2/53 nur die Zahlen „1“ und die Endzeile „$\overline{30}$“ (vgl. Peet [1], S. 43) und das Wort *ḏꜣ.t* an unrichtiger Stelle, oder mindestens in anderem Gebrauche als bei den vorangehenden Rechnungen, da es nach deren Muster sofort nach der Zeile „$\overline{30}$“ stehen müßte und zwar als „*ḏꜣ.t* $\overline{6}+\overline{15}$“, nicht erst später nur als „*ḏꜣ.t* $\overline{15}$“. Hier hat also wohl ein Schreiber erst nachträglich seine Kunst erweisen wollen, und war, wie meist in solchen Fällen, dabei nicht ganz glücklich in der Nachahmung seiner Vorgänger. Wenn wir also 53 weglassen, so ist unsere „*ḏꜣ.t*-Tabelle“ genau mit einer mathematisch wohldefinierten Klasse von Rechnungen identisch.

IV. *gmj*.

Nunmehr tritt eine neue mathematische Idee auf den Plan: die konsequente Behandlung der „Ausnahmezahlen“, gestützt auf die Untersuchung des Ergänzungstermes und der zugehörigen Hilfszahlen (vgl. § 5). In dem Intervall von $n = 43$ bis $n = 89$ (darauf wollen wir uns hier beschränken) sind, abgesehen von den durch 3 teilbaren Zahlen (vgl. I d) fast nur noch Ausnahmezahlen enthalten. Die wenigen noch durch Teilbarbeit zu behandelnden Zahlen werden mit deren Hilfe erledigt, für die Ausnahmezahlen müssen die in § 5 geschilderten Überlegungen zur Geltung kommen. Diese Rechnungen sind sämtlich dadurch kenntlich, daß sie fast alle Nebenrechnung unterdrücken, statt dessen aber das Wort *gmj* („finden“) enthalten, das hier etwa so viel bedeuten wird wie unser „man findet“. Es tritt also *gmj* in allen Zerlegungen auf, mit genauer Auslassung der durch 3 teilbaren n. Es ist vielleicht kein Zufall, daß der erste Bruch (2/43) dieser „*gmj*-Tabelle“ gerade derjenige ist, dessen Zerlegung sich in schlagendster Weise auf die Hilfszahlen des Ergänzungstermes (**42 + 1**) stützt (vgl. S. 20); man könnte glauben, daß die neue Methode gerade an diesem Beispiel erfunden wurde, um dann sofort auf alle restlichen Ausnahmefälle erstreckt zu werden[1]). Ein so kluger Rechner durfte sich dann auch erlauben, ein kurzes *gmj* „wie man leicht findet“ an Stelle der langweiligen Nebenrechnungen zu setzen.

V. Vervollständigung der Tabelle.

a) Zwischen $n = 15$ und der *gmj*-Tabelle klafft noch eine kleine Lücke, die von der *ḏꜣ.t*-Tabelle nicht vollständig ausgefüllt werden kann: von 25 bis 35, wobei nur 27 und 33 wegen ihrer Teilbarkeit durch 3 (I d) wegzulassen sind. Es wird nun 2/25 richtig mit dem Hauptglied $\overline{3}$ (Teilbarkeit durch 5) zerlegt, 2/31 nach dem Muster der *gmj*-Tabelle ganz geschickt mit den Hilfszahlen $\mathbf{20 + 10 + 1}$. Ferner ist 29 entweder von dem dreifachen Hauptglied $\overline{2} + \overline{6} + \overline{8}$ oder vom Ergänzungsterm mit den Hilfszahlen $\mathbf{24 + 4 + 1}$ aus behandelt. Ganz zufällig ist aber die Zerlegung von 2/35, was sich ja auch schon (vgl. S. 22 und 23 Anm. 1) rein äußerlich im Papyrus zeigt. — Das Wort *gmj* findet sich hier nirgends, trotz der Kürze der Rechnungen.

b) Ergänzung von 91 bis 101. Hier steht nun überall *gmj*[2]), auch bei den durch 3 teilbaren Zahlen 93 und 99. Aber der Schreiber war sehr viel ungeschickter als sein Vorgänger. Zwar 2/93 und 2/99 hat er gerade noch richtig zerlegt, wenn er auch mit den Merkstrichen und dgl. nicht ganz genau verfuhr. Aber bei 95 entging ihm, daß er bereits mit $\overline{3}$ im Hauptglied statt mit $\overline{4} + \overline{6}$ hätte auskommen können und 91 und 97 sind ganz willkürlich behandelte Ausnahmezahlen, obwohl z. B. 2/91 sehr bequem nach dem Vorbild von 89 zu zerlegen gewesen wäre. Schließlich ist 2/101 fast ganz „trivial“ zerlegt, nämlich durch $\overline{101} + (\overline{202} + \overline{303} + \overline{606})$[3]).

Mit diesen beiden Ergänzungen hat die $2/n$-Tabelle die Gestalt erreicht, wie sie uns heute im Papyrus Rhind vorliegt. Es ist vielleicht nicht zu gewagt, in den drei Worten *snn pw n* d. h. „es ist eine Abschrift von“, die Peet noch aus den New-Yorker Fragmenten erwähnt (Peet [1], S. 49), ein Zitat auf noch andere benutzte Quellen zu erblicken, neben der bereits in der Einleitung des Papyrus genannten. Jedenfalls aber scheint mir kein Zweifel möglich, daß die im Vorangehenden besprochenen Teile der $2/n$-Tabelle verschiedenen zeitlich vielleicht recht weit auseinanderliegenden Entwicklungsphasen angehören[4]).

Es ist selbstverständlich nicht möglich, die Schritte dieser Entwicklung in jedem Einzelfalle zu verfolgen; aber ihre große Linie ist wohl nicht mehr zu verkennen. Man darf auch hier nicht in den Fehler verfallen, von dem Ägypter zu viel bewußte Systematik vorauszusetzen. Die Grundlage der Berechnung bildet zweifellos ein gewisses Eyperimentieren, das zeigen schon die kleinen Schwankungen um die Regel. Aber dieses Experimentieren erfolgt nach einem in seiner Wurzel so einheitlichen und festen Schema, daß es von selbst zu ganz bestimmten Resultaten führt. Für den Ägypter war die Stammbruchzerlegung praktisch eine eindeutige.

So rundet sich das Bild der ägyptischen Mathematik, das ich gleich zu Anfang durch das Stichwort „additiv“ zu kennzeichnen versucht habe, zu einem großen Ganzen. Das Zählen, der Ausgangspunkt jedes Rechnens, entwickelt sich in Übereinstimmung mit Sprache und Schrift zur Ausbildung eines ersten Rechenverfahrens, zur wiederholten Addition, d. h. zur „dyadischen

1) Man beachte die Einheitlichkeit der Behandlung von 47, 53, von 61, 67, 71 und von 73, 79, 83, 89 (vgl. Tafel IV, 2 bezw. Tafel V).

2) Bei 91 sogar zweimal. Bei 101 ist es vielleicht in den zerstörten Teilen zu ergänzen.

3) Vgl. S. 10 bezw. S. 10 Anm. 2.

4) Auch B. Gunn ist durch Betrachtung der äußeren Anordnung der Nebenrechnungen in der $2/n$-Tabelle zu einer Klassifizierung dieser Zerlegungen gekommen, die fast genau mit der soeben besprochenen übereinstimmt (Gunn [2], S. 128; auch den Gebrauch von *gmj* hat Gunn mit herangezogen). Diese Übereinstimmung erscheint mir um so erfreulicher, als Gunn nicht durch die bei mir vorangehenden theoretischen Überlegungen beinflußt ist.

Multiplikation“ der im täglichen Leben vorkommenden ganzen Zahlen. Aber neben diesen spielen die einfachsten Bruchteile eine ebenso wichtige und fast noch individuellere Rolle. Obwohl diese Brüche nicht so unmittelbar miteinander zu verknüpfen sind, wie die ganzen Zahlen, so hat man sicherlich schon früh erkannt, daß etwa 1/3 durch ein halbes Drittel zu 1/2 ergänzt werden kann und dgl. mehr. Man lernt auch mit Bruchteilen zu „rechnen“ — es ist das nächstliegende Problem, zu versuchen dieses Rechnen nach dem Muster einzurichten, das bei den ganzen Zahlen ausgebildet ist; die Schrift tut das Ihre, ein solches Verfahren an die Hand zu legen. — Wie die konsequente Durchführung dieses Gedankens unter allmählicher Überwindung mancher Schwierigkeiten zu der uns überlieferten Bruchrechnung führen mußte, habe ich im Vorangehenden zu zeigen versucht. Ich glaube kaum, daß dieses Bild der ägyptischen Mathematik noch wesentlicher Ergänzungen bedarf, daß man genötigt ist, Multiplikationstabellen, besondere Rechengeräte („Abacus“) und dergleichen anzunehmen, ohne daß sie sich tatsächlich überliefert finden[1]): Die bisher entwickelten Hilfsmittel der ägyptischen Mathematik sind ausreichend zur Bewältigung der ihr gestellten Aufgaben. — Und nur der beispiellosen Zähigkeit des Ägypters, getreulich zu bewahren, was sie „in den Schriften der alten Zeit“ gefunden haben, verdanken wir es, daß wir heute noch versuchen können, die Grundlagen ihrer Mathematik aufzudecken.

1) Z. B. Griffith [1], Bd. 16, S. 172 (‡). Ich denke hier natürlich immer nur an die klassische Zeit. Die Erzählung von den Rechenbrettern, die sich in den Büchern über Geschichte der Mathematik eingebürgert hat, stützt sich bloß auf die beiden Worte λογίζονται ψήφοισι in der berühmten Stelle Herodot II 36.

Anhang.

Verzeichnis der gebrauchten Abkürzungen.

Brockelmann [1] = C.B., Grundriß der vergleichenden Grammatik der semitischen Sprachen. 2. Bde. Berlin, Reuther & Reichard, I 1908, II 1913.
Eisenlohr [1] = A.E., Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt. Leipzig, Hinrichs 1877. I Commentar, II Tafeln.
— [2] = 2. Ausgabe von [1] aber ohne Tafeln. — S. 275 bis 278 enthält Verbesserungen zu [1]. Von Seite 9 der 2. Ausgabe an erhält man die Seitenzahlen von [1] durch Addition von 18. [2] ist nicht 1877, sondern 1891 erschienen (vgl. Hultsch [2], S. 178 Anm. 2).
Erman [1] = A.E., Ägyptische Grammatik mit Schrifttafel, Literatur, Lesestücken und Wörterverzeichnis. 3. Aufl. Berlin, Reuther & Reichard, 1911 = Porta linguarum orientalium XV.
— [2] = Die Literatur der Ägypter. Gedichte, Erzählungen und Lehrbücher aus dem 3. und 2. Jahrtausend v. Chr. Leipzig, Hinrichs, 1923.
Erman-Ranke [1] = A.E. und H.R., Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum. Tübingen, Mohr, 1923. (Neubearbeitung der 1. Aufl. durch Ranke).
Friedlein [1] = G.F., Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen, Ambr. Deichert, 1869.
Griffith [1] = F.L.G., The Rhind Mathematical Papyrus. PSBA 13 (1891) S. 328 ff.; 14 (1892) S. 26 ff.; 16 (1894) S. 164 ff., S. 201 ff., S. 230 ff.
— [2] = The Metrology of the Medical Papyrus Ebers. PSBA 13 (1891) S. 392 ff.
— [3] = Notes on Egyptian weights and measures. PSBA 14 (1892), S. 403 ff., 15 (1893) S. 301 ff.
— [4] = The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob. (Principally of the middle Kingdom). London, Quaritch, 1898. Text und Tafeln.
Gunn [1] = B.G., Rezension von Sethe [1]. JEA 3 (1916) S. 279 ff.
— [2] = Rezension von Peet [1]. JEA 12 (1926) S. 123 ff. (Nur nachträglich berücksichtigt.)
Hankel [1] = H.H., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, Teubner, 1874.
Heath [1] = Th.H., A History of Greek Mathematics. 2 Bde. Oxford, Clarendon Press 1921.
Hilbert = D.H., Über das Unendliche, Mathem. Annalen 95 (1925) S. 161 ff.
Hultsch [1] = Fr.H., Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung. Erste Abh., Bd. XVII d. Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. (phil.-hist.) Nr. 1 1895.
— [2] = Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung. BM 3. Folge 2 (1901) S. 177 ff.
Humboldt [1] = A.v.H., Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. Crelle Bd. 4 (1829), S. 205 ff.
Lepsius [1] = R.L., Die Regeln in den hieroglyphischen Bruchbezeichnungen. ÄZ 3 (1865) S. 101 ff.
Lidzbarski [1] = M.L., Handbuch der Nordsemitischen Epigraphik nebst ausgewählten Inschriften. Weimar, Felber, 1898. Text und Tafeln.
Neugebauer [1] = O.N., Rezension von Peet [1]. Mathematik Tidskrift B 1925, S. 66 ff.
Peet [1] = T.E.P., The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Introduction, Translation and Commentary. Liverpool, University Preß, 1922.
Schack-Schackenburg [1] = H.Sch.-Sch., Der Berliner Papyrus 6619. ZÄ 38 (1900) S. 135 ff.
Schäfer [1] = H.Sch., Von ägyptischer Kunst, besonders der Zeichenkunst. Leipzig, Hinrichs. 1. Aufl. (2 Bde.) 1919, 2. Aufl. 1922.

Scharff [1] Die Ausgrabung von Kerma. OLZ 29 (1926) Sp. 89 ff.
Sethe [1] = K. S., Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte der Rechenkunst und Sprache. Straßburg, Trübner, 1916 = Schriften d. Wiss. Gesellsch. Straßburg. 25. Heft.
— [2] = Selbstanzeige von [1]. GGA 1916, S. 476 ff.
— [3] = Rezension von Peet [1]. DMV 33. (1925) 2. Abtlg. S. *139* ff.
Smith-Karpinski [1] = D.E.S. und L.Ch.K., The Hindu-Arabic numerals. Boston and London, Ginn, 1911.
Spiegelberg [1] = W.S., Rechnungen aus der Zeit Setis I. (circa 1350 v. Chr.) mit anderen Rechnungen des neuen Reiches. Text und Tafeln. Straßburg, Trübner, 1896.
Thureau-Dangin [1] = Numération et Métrologie Sumeriennes. RA 18 (1921) S. 123 ff.

ÄZ = Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde.
BM = Bibliotheca Mathematica.
Crelle = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
DMV = Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.
GGA = Göttingische gelehrte Anzeigen.
JEA = The Journal of Egyptian Archaelogy.
OLZ = Orientalistische Literaturzeitung.
PSBA = Proceedings of the Society of Biblical Archaelogy.
RA = Revue d'Assyriologie.

Lebenslauf.

In Innsbruck als Sohn des Eisenbahn-Ingenieurs Rudolf Neugebauer am 26. 5. 1899 geboren, verbrachte ich meine Kindheit nach dem Tode meiner Eltern in Graz, wo ich März 1917 die Reifeprüfung am dortigen I. Staatsgymnasium ablegte. Von Oktober 1917 bis November 1918 stand ich im Felde, geriet beim Waffenstillstand in italienische Gefangenschaft, aus der ich im Herbst 1919 zurückgekehrt bin. Ich widmete mich nun dem Studium der theoretischen Physik — Prof. Radakovic und Prof. Weitzenböck waren hier meine Lehrer — ging dann W.-S. 1921/22 nach München, wo ich durch Vorlesungen von Geh. Rat Sommerfeld und Prof. Rosenthal angeregt wurde, mich der Mathematik zuzuwenden. Seit S.-S. 1922 befand ich mich in Göttingen, ausgenommen Frühjahr 1924, wo ich bei Prof. H. Bohr in Kopenhagen arbeitete. In Göttingen hörte ich insbesondere Vorlesungen bei Prof. Courant, Landau und E. Noether. In dem Gebiete der Ägyptologie, mit der ich mich neben der Mathematik in Göttingen beschäftigt habe, sind Geh. Rat Sethe und Prof. Kees meine Lehrer. Seit W.-S. 1923/24 habe ich am mathematischen Institut und bei Prof. Courant Assistentendienste getan; Oktober 1925 wurde mir die außerplanmäßige Assistentenstelle bei Prof. Courant übertragen.

Allen meinen Lehrern gilt mein aufrichtiger Dank; vor allem aber fühle ich mich Herrn Prof. Courant in wissenschaftlicher wie persönlicher Hinsicht aufs tiefste verpflichtet.

Tafel I.

Die $2/n$-Tabelle.[1)]

n	$2/n$	Zerlegung von 2	
		Hauptglied	Ergänzungsterm
3	$\overline{2}+\overline{6}$ [2)]	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
5	$\overline{3}+\overline{15}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
7	$\overline{4}+\overline{28}$	$\overline{4}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
9	$\overline{6}+\overline{18}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
11	$\overline{6}+\overline{66}$	$\overline{6}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$
13	$\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$	$\overline{4}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{8}$
15	$\overline{10}+\overline{30}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
17	$\overline{12}+\overline{51}+\overline{68}$	$\overline{3}+\overline{4}$	$1+\overline{3}+\overline{12}$
19	$\overline{12}+\overline{76}+\overline{114}$	$\overline{4}+\overline{6}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$
21	$\overline{14}+\overline{42}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
23	$\overline{12}+\overline{276}$	$\overline{12}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{4}$
25	$\overline{15}+\overline{75}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
27	$\overline{18}+\overline{54}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
29	$\overline{24}+\overline{58}+\overline{174}+\overline{232}$	$\overline{2}+\overline{6}+\overline{8}$	$1+\overline{6}+\overline{24}$
31	$\overline{20}+\overline{124}+\overline{155}$	$\overline{4}+\overline{5}$	$1+\overline{2}+\overline{20}$
33	$\overline{22}+\overline{66}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
35	$\overline{30}+\overline{42}$	$\overline{\overline{3}}+\overline{6}$	$1+\overline{6}$
37	$\overline{24}+\overline{111}+\overline{296}$	$\overline{3}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{24}$
39	$\overline{26}+\overline{78}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
41	$\overline{24}+\overline{246}+\overline{328}$	$\overline{6}+\overline{8}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{24}$
43	$\overline{42}+\overline{86}+\overline{129}+\overline{301}$	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$	$1+\overline{42}$
45	$\overline{30}+\overline{90}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
47	$\overline{30}+\overline{141}+\overline{470}$	$\overline{3}+\overline{10}$	$1+\overline{2}+\overline{15}$
49	$\overline{28}+\overline{196}$	$\overline{4}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$

1) Nach Peet [1], S. 37. Dieselben Werte, allerdings nur bis $n=21$ nochmals in den Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1 bis 11.

2) Die Zerlegung $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ habe ich nur der Vollständigkeit halber eingesetzt. Im Papyrus Rhind befindet sich an dieser Stelle nur $\overline{\overline{3}}$ angegeben (vgl. Peet [1], Pl. A; ebenso Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1).

n	$2/n$	Zerlegung von 2	
		Hauptglied	Ergänzungsterm
51	$\overline{34} + \overline{102}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
53	$\overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$	$\overline{6} + \overline{15}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{10}$
55	$\overline{30} + \overline{330}$	$\overline{6}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{6}$
57	$\overline{38} + \overline{114}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
59	$\overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$	$\overline{4} + \overline{9}$	$1 + \overline{2} + \overline{12} + \overline{18}$
61	$\overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$	$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10}$	$1 + \overline{2} + \overline{40}$
63	$\overline{42} + \overline{126}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
65	$\overline{39} + \overline{195}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
67	$\overline{40} + \overline{335} + \overline{736}$	$\overline{5} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{8} + \overline{20}$
69	$\overline{46} + \overline{138}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
71	$\overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$	$\overline{8} + \overline{10}$	$1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{40}$
73	$\overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$	$\overline{3} + \overline{4} + \overline{5}$	$1 + \overline{6} + \overline{20}$
75	$\overline{50} + \overline{150}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
77	$\overline{44} + \overline{308}$	$\overline{4}$	$1 + \overline{2} + \overline{4}$
79	$\overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$	$\overline{3} + \overline{4} + \overline{10}$	$1 + \overline{4} + \overline{15}$
81	$\overline{54} + \overline{162}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
83	$\overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$	$\overline{4} + \overline{5} + \overline{6}$	$1 + \overline{3} + \overline{20}$
85	$\overline{51} + \overline{255}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
87	$\overline{58} + \overline{174}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
89	$\overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$	$\overline{4} + \overline{6} + \overline{10}$	$1 + \overline{3} + \overline{10} + \overline{20}$
91	$\overline{70} + \overline{130}$	$\overline{\overline{3}} + \overline{30}$	$1 + \overline{5} + \overline{10}$
93	$\overline{62} + \overline{186}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
95	$\overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$	$\overline{4} + \overline{6}$	$1 + \overline{2} + \overline{12}$
97	$\overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$	$\overline{7} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{8} + \overline{14} + \overline{28}$
99	$\overline{66} + \overline{198}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
101	$\overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$	$\overline{2} + \overline{3} + \overline{6}$	1

Tafel II.

Zerlegungsschemata.

I. Einfaches Hauptglied.

Fall Nr.	Hauptglied	n	Ausnahmen	Teilbarkeit durch
1)	$\overline{2}$	9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99		3
2)	$\overline{4}$	7, 49, 77	35, 91	7
3)	$\overline{8}$	= Fall 1)		15
4)	$\overline{3}$	5, 25, 65, 85	(55)[1] (95)[2]	5
5)	$\overline{6}$	11, 55		11
6)	$\overline{12}$	23		23

II. Zweifaches Hauptglied.

Fall Nr.	Hauptglied	n	Ausnahmen	Teilbarkeit durch
1)	$\overline{2}+\overline{4}$	= Fall I, 4)		5
2)	$\overline{4}+\overline{8}$	13		13
3)	$\overline{2}+\overline{8}$	= Fall I, 5)		11
4)	$\overline{3}+\overline{4}$	17		17
5)	$\overline{6}+\overline{8}$	41		41
6)	$\overline{3}+\overline{8}$	37		37
7)	$\overline{2}+\overline{3}$	= Fall I, 2)		7
8)	$\overline{4}+\overline{6}$	19, 95		19
9)	$\overline{8}+\overline{12}$		43	43
10)	$\overline{2}+\overline{6}=\overline{\overline{3}}$			
11)	$\overline{4}+\overline{12}=\overline{3}$			
12)	$\overline{2}+\overline{12}$	= Fall 4)		17
13)	$\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$			
14)	$\overline{6}+\overline{12}=\overline{4}$			
15)	$\overline{3}+\overline{12}$	= Fall 8)		19

1) Vgl. Fall 5). 2) Vgl. Fall II, 8).

Tafel III.

Ergänzungstabellen. [1]

1. Zu 2/7.

		1/7	1/14	1/28
		Nr. 11	Nr. 12	Nr. 14
		$1 \quad \bar{7} \quad [\mathbf{4}]$ $\bar{2} \quad \overline{14} \quad [\mathbf{2}]$ $\bar{4} \quad \overline{28} \quad [\mathbf{1}]$ $\bar{4}$	$1 \quad \overline{14} \quad [\mathbf{2}]$ $\bar{2} \quad \overline{28} \quad [\mathbf{1}]$ $\bar{4} \quad \overline{56} \quad [\bar{\mathbf{2}}]$ $\bar{8}$	$1 \quad \overline{28} \quad \mathbf{1}$ $\bar{2} \quad \overline{56} \quad \bar{\mathbf{2}}$ $\bar{4} \quad \overline{112} \quad \bar{\mathbf{4}}$ $\overline{16}$
4/7	2/7			
Nr. 9	Nr. 7, 7b, 10	[Nr. 11b]	Nr. 13	Nr. 15
$1 \quad \bar{2} + \overline{14}$ $[\mathbf{14} \quad \mathbf{2}]$ $\bar{2} \quad \bar{4} + \overline{28}$ $[\mathbf{7} \quad \mathbf{1}]$ $\bar{4} \quad \bar{8} + \overline{56}$ $[\mathbf{3}+\bar{\mathbf{2}} \quad \bar{\mathbf{2}}]$ 1	$1 \quad \bar{4} + \overline{28}$ $\mathbf{7} \quad \mathbf{1}$ $\bar{2} \quad \bar{8} + \overline{56}$ $\mathbf{3}+\bar{\mathbf{2}} \quad \bar{\mathbf{2}}$ $\bar{4} \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} \quad \bar{\mathbf{4}}$ $\bar{2}$	$[1 \quad \bar{8} + \overline{56}$ $\mathbf{3}+\bar{\mathbf{2}} \quad \bar{\mathbf{2}}$ $\bar{2} \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} \quad \bar{\mathbf{4}}$ $\bar{4} \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} \quad \bar{\mathbf{8}}$ $\bar{4}]$	$1 \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} \quad \bar{\mathbf{4}}$ $\bar{2} \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} \quad \bar{\mathbf{8}}$ $\bar{4} \quad \overline{64} + \overline{448}$ $\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} \quad \overline{\mathbf{16}}$ $\bar{8}$	$1 \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} \quad \bar{\mathbf{8}}$ $\bar{2} \quad \overline{64} + \overline{448}$ $\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} \quad \overline{\mathbf{16}}$ $\bar{4} \quad \overline{128} + \overline{896}$ $\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}}+\overline{\mathbf{32}} \quad \overline{\mathbf{32}}$ $\overline{16}$

2. Zu 2/9.

	Nr. 16	Nr. 8	
	$1 \quad \bar{2} \quad [\mathbf{9}]$ $\bar{\bar{3}} \quad \bar{3} \quad [\mathbf{6}]$ $\bar{3} \quad \bar{6} \quad [\mathbf{3}]$ 1	$1 \quad \bar{4} \quad \mathbf{4}+\bar{\mathbf{2}}$ $\bar{\bar{3}} \quad \bar{6} \quad \mathbf{3}$ $\bar{3} \quad \overline{12} \quad \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}$ $\bar{2} \quad \mathbf{9}$	
Nr. 17	Nr. 18	Nr. 19	Nr. 20
$1 \quad \bar{3} \quad [\mathbf{6}]$ $\bar{\bar{3}} \quad \bar{6}+\overline{18} \quad [\mathbf{4}]$ $\bar{3} \quad \bar{9} \quad [\mathbf{2}]$ $\bar{\bar{3}}$	$1 \quad \bar{6} \quad [\mathbf{3}]$ $\bar{\bar{3}} \quad \bar{9} \quad [\mathbf{2}]$ $\bar{3} \quad \overline{18} \quad [\mathbf{1}]$ $\bar{3}$	$1 \quad \overline{12} \quad \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}$ $\bar{\bar{3}} \quad \overline{18} \quad \mathbf{1}$ $\bar{3} \quad \overline{36} \quad \bar{\mathbf{2}}$ $\bar{6}$	$1 \quad \overline{24} \quad \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}$ $\bar{\bar{3}} \quad \overline{36} \quad \bar{\mathbf{2}}$ $\bar{3} \quad \overline{72} \quad \bar{\mathbf{4}}$ $\overline{12}$

1) [ ] bezeichnet Ergänzungen.

Tafel IV.

Die Ausnahmezahlen.

1. Uebersicht.

31	59	79
35	61	83
43	67	89
47	71	91
53	73	97

2. Zerlegungen und Hilfszahlen. [1]

n	Hauptglied		Ergänzungsterm		b
	Koeffizient Hilfszahlen	Summe $2n-b$	Koeffizient Hilfszahlen	Summe n	
31	$\overline{4}+\overline{5}$ **5 4**	**9**	$1+\overline{2}+\overline{20}$ **20 10 1**	**31**	**20**
35	$\overline{\overline{3}}+\overline{6}$ **4 1**		$1+\overline{6}$ **6 1**		
43	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$ **21 14 6**	**41**	$1+\overline{42}$ **42 1**	**43**	**42**
47	$\overline{3}+\overline{10}$ **10 3**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{15}$ **30 15 2**	**47**	**30**
53	$\overline{6}+\overline{15}$ **5 2**	**7**	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}$ **30 20 3**	**53**	**30**
59	$\overline{4}+\overline{9}$ **9 4**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{12}+\overline{18}$ **36 18 3 2**	**59**	**36**

1) Nur auf die Zerlegung von 2 bezüglich. Vgl. auch Tafel I.

n	Hauptglied Koeffizient Hilfszahlen	Hauptglied Summe $2n-b$	Ergänzungsterm Koeffizient Hilfszahlen	Ergänzungsterm Summe n	b
61	$\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$ **10 5 4**	**19**	$1+\overline{2}+\overline{40}$ **40 20 1**	**61**	**40**
67	$\overline{5}+\overline{8}$ **8 5**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$ **40 20 5 2**	**67**	**40**
71	$\overline{8}+\overline{10}$ **5 4**	**9**	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$ **40 20 10 1**	**71**	**40**
73	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{5}$ **20 15 12**	**47**	$1+\overline{6}+\overline{20}$ **60 10 3**	**73**	**60**
79	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{10}$ **20 15 6**	**41**	$1+\overline{4}+\overline{15}$ **60 15 4**	**79**	**60**
83	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}$ **15 12 10**	**37**	$1+\overline{3}+\overline{20}$ **60 20 3**	**83**	**60**
89	$\overline{4}+\overline{6}+\overline{10}$ **15 10 6**	**31**	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$ **60 20 6 3**	**89**	**60**
91	$\overline{\overline{3}}+\overline{30}$ **20 1**		$1+\overline{5}+\overline{10}$ **10 2 1**		
97	$\overline{7}+\overline{8}$ **8 7**	**15**	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$ **56 28 7 4 2**	**97**	**56**

Zur Entstehungsgeschichte der $2/n$-Tabelle.

n	teilbar durch	Hauptglied	Hilfszahlen im Ergänzungsterm	Terminologie	Bemerkung
3		$\overline{2}$			
5		$\overline{3}$			
7		$\overline{4}$			
9	3				
11		$\overline{6}$			
13		$\overline{4}+\overline{8}$			
15	3				
17		$\overline{3}+\overline{4}$		*ḏꜣ.t*	
19		$\overline{4}+\overline{6}$		*ḏꜣ.t dmḏ*	
21	3				
23		$\overline{12}$		*ḏꜣ.t dmḏ*	
25	5				
27	3				
29		$\overline{2}+\overline{6}+\overline{8}$	**24 + 4 + 1**		
31			**20 + 10 + 1**		
33	3				
35					Ausnahme
37		$\overline{3}+\overline{8}$		*ḏꜣ.t*	
39	3				
41		$\overline{6}+\overline{8}$		*ḏꜣ.t dmḏ*	
43			**42 + 1**	*gmj*	
45	3				
47			**30 + 15 + 2**	*gmj*	
49	7			*gmj*	
51	3				
53			**30 + 20 + 3**	(*ḏꜣ.t dmḏ*) *gmj*	
55	11			*gmj*	11 statt 15
57	3				
59				*gmj*	Ausnahme?
61			**40 + 20 + 1**	*gmj*	
63	3				
65				*gmj*	
67			**40 + 20 + 5 + 2**	*gmj*	
69	3				
71			**40 + 20 + 10 + 1**	*gmj*	
73			**60 + 10 + 3**	*gmj*	
75	3				
77	7			*gmj*	
79			**60 + 15 + 4**	*gmj*	
81	3				
83			**60 + 20 + 3**	*gmj*	
85	5			*gmj*	
87	3				
89			**60 + 20 + 6 + 3**	*gmj*	
91				*gmj*	Ausnahme
93	3			*gmj*	
95	19			*gmj*	19 statt 5
97				*gmj*	Ausnahme
99	3			*gmj*	
101				[*gmj*]?	triviale Zerlegung

Tafel VI.

Die 2/3-Tabelle. 1)

Zeile					
1	$\overline{\overline{3}}$	von	$\overline{\overline{3}}$	ist	$\overline{3}+\overline{9}$
2	$\overline{3}$	„	$\overline{\overline{3}}$	„	$\overline{6}+\overline{18}$
3	$\overline{\overline{3}}$	„	$\overline{3}$	„	$\overline{6}+\overline{18}$
4	$\overline{\overline{3}}$	„	$\overline{6}$	„	$\overline{12}+\overline{36}$

Zeile					
5	$\overline{\overline{3}}$	von seinem	$\overline{2}$	ist	$\overline{3}$
6	$\overline{3}$	„ „	$\overline{2}$	„	$\overline{6}$
7	$\overline{6}$	„ „	$\overline{2}$	„	$\overline{12}$
8	$\overline{12}$	„ „	$\overline{2}$	„	$\overline{24}$

Zeile						
9	$\overline{9}$	$\overline{\overline{3}}$ von ihm ist	$\overline{18}+\overline{54}$	$\overline{9}$ von $\overline{\overline{3}}$	$\overline{18}+\overline{54}$ 2)
10	[$\overline{9}$	$\overline{3}$ . . . .]			
11	[$\overline{9}$	$\overline{2}$ . . . .]			
12	[$\overline{5}$	$\overline{\overline{3}}$ . . . .]			
13	[$\overline{5}$	$\overline{3}$ . . . .]			
14	[$\overline{5}$	$\overline{2}$ . . . .]			
15	[$\overline{5}$]	$\overline{4}$ von ihm ist	$\overline{20}$		
16	$\overline{7}$	$\overline{\overline{3}}$ ist	$\overline{14}+\overline{42}$		
17	$\overline{7}$	$\overline{2}$ von ihm	$\overline{14}$		
18	$\overline{11}$	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{22}+\overline{66}$	$\overline{3}$ von ihm	$\overline{33}$
19	$\overline{11}$	$\overline{2}$ von ihm	$\overline{22}$	$\overline{4}$ „ „	$\overline{44}$

1) [ ] bedeutet Ergänzung zerstörter Stellen, im Wesentlichen nach Peet [1], S. 103. Nur in Zeile 15 wäre für das [$\overline{5}$] noch Platz im Papyrus (vgl. Eisenlohr [1], Tafel XIX). Bei selbstverständlichen Ergänzungen habe ich keine Klammern eingesetzt; man vergleiche deshalb Peet [1], Pl. R.

2) Steht eigentlich (als Korrektur) vor dem übrigen Teil der Zeile.