A Very Happy
New Year to you
oppie. Sure have
I missed you.
Pat McAndrew

Theorem:

Assumptions: Let S be a closed, bounded and non-empty subset of ~~N-dimensional space Euclidean space~~ E_N. ~~topological simplex~~ in the N-dimensional euclidean space E_N. Thus it is a Let S_c be the smallest convex set containing it.

Let to every point $p \varepsilon S$ correspond a closed, bounded and non-empty set $A(p) \subset S$, let $A_c(p)$ the smallest convex set containing it.

Assume, that if $p_n \to p$, $q_n \to q$, $q_n \varepsilon A(p_n)$, that $q \varepsilon A(p)$. (Quasi-continuity of $A(p)$.)

Assume that a continuous function $\mathcal{F}(p)$, defined in all of S_c exists, such that $q \varepsilon S_c$ implies $\mathcal{F}(q) \varepsilon S$, and $q \varepsilon A_c(p)$ implies $\mathcal{F}(q) \varepsilon A(p)$.

Statement:

A $p \varepsilon S$ with $p \varepsilon A(p)$ exists.

Proof:

For any $q \varepsilon E_N$ denote by $\mathcal{N}(q)$ the $p \varepsilon S$ with $\operatorname{Dist}(p,q)$ minimum. For any $q \varepsilon E_N$ and $\varepsilon > 0$ denote by $\mathcal{C}(q,\varepsilon)$ the sphere of center q and radius ε: that is the set of all points $p \varepsilon E_N$ with $\operatorname{Dist}(p,q) < \varepsilon$. Denote by $K(p,q,\varepsilon)$ the function $\operatorname{Max}(\varepsilon - \operatorname{Dist}(p,q), 0)$, which ist allways ≥ 0, but > 0 if and only if $p \varepsilon \mathcal{C}(q,\varepsilon)$.

Define for every $p \varepsilon S$ a point $\xi(p) \varepsilon A(p)$ in an arbitrary way, but at any rate so, that $\xi(p)$ is a measurable function of p. Define

$$\mathcal{A}(q,\varepsilon) = \mathcal{F}\left(\frac{\int K(p,q,\varepsilon)\ \xi(\mathcal{N}(p))\, dp}{\int K(p,q,\varepsilon)\, dp} \right),$$

where $\int$ is extended over E_N or, what, owing to the presence of the factor $K(p,q,\varepsilon)$, is the same thing, over $\mathcal{C}(q,\varepsilon)$.

As $\xi(\mathcal{N}(p)) \varepsilon A(\mathcal{N}(p)) \subset S$, the argument of $\mathcal{F}(\ldots)$ is εS_c, and thus, by assumption $\mathcal{F}(\ldots)$ itself is εS. That is:

$$\mathcal{A}(q,\varepsilon) \varepsilon S.$$

In $\mathcal{F}(\ldots)$ the argument has a numerator, which is continuous in q, as $K(p,q,\varepsilon)$ is it; while is denominator is obviously independent of q. Thus $\mathcal{F}(\ldots)$ is continuous in q, that is $\mathcal{A}(q,\varepsilon)$ is continuous in q.

So $\mathcal{A}(q,\varepsilon)$ is a continuous function of q, which maps S on a subset of S. As S is, by assumption, a all sets $A(r)$, $r \varepsilon \mathcal{C}(\bar{q}, \eta_s)$. This is true for all $s = 1, 2, \cdots$, and as $\eta_s \to 0$ for $s \to \infty$, we may even say: $\bar{r}$ lies in the smallest convex set containing all sets $A(r)$, $r \varepsilon \mathcal{C}(\bar{q}, \varepsilon)$, for every $\varepsilon > 0$.

If $\varepsilon \to 0$, then, owing to the quasi-continuity, as described in the assumptions, the common part of all these convex sets is the smallest convex set containing $A(\bar{q})$, that is $A_c(\bar{q})$. Thus $\bar{r} \varepsilon A_c(\bar{q})$, and then, by assumption, $\bar{q} = F(\bar{r}) \varepsilon A(\bar{q})$, so that $p = \bar{q}$ solves our problem $p \varepsilon S$, $p \varepsilon A(p)$.

Q.e.d.

Applications:

1./ If S and all $A(p)$ are convex, the assumptions concerning the function $F(p)$ can be omitted.

Proof: As $S = S_c$, $A(p) = A_c(p)$, we may put $F(p) = p$.

2./ Let N be $= m + n$, and denote the coordinates in the N-dimensional Euclidean space E_N by $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$. Let $a_{\mu\nu}$, b_μ be real, > 0, numbers. (Always $\mu = 1, \cdots, m$; $\nu = 1, \cdots, n$.) Let $f_\mu(x, y)$, $g_\nu(x, y)$ be some continuous functions. Define S by

$$\sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu = 1, \quad \sum_\mu b_\mu x_\mu = 1, \quad x_\mu \geq 0, \; y_\nu \geq 0.$$

Define $A(x, y)$ in this manner: $(x', y') \varepsilon A(x, y)$ means, that

$$f_\mu(x, y) \neq 0 \quad \text{implies} \quad x'_\mu = 0,$$
$$g_\nu(x, y) \neq 0 \quad \text{implies} \quad y'_\nu = 0.$$

For this case our assumptions hold.

Proof: The transformation

$$\left.\begin{aligned} x^*_\mu &= b_\mu x_\mu, \\ y^*_\nu &= \left(\sum_\mu a_{\mu\nu} x_\mu\right) y_\nu, \end{aligned}\right| \text{Inverse:} \left| \begin{aligned} x_\mu &= \frac{1}{b_\mu} x^*_\mu, \\ y_\nu &= \frac{1}{\sum_\mu \frac{a_{\mu\nu}}{b_\mu} x^*_\mu} y^*_\nu, \end{aligned}\right.$$

clearly maps our S in a one-to-one and bi-continuous way on the set

II

topological simplex, we can apply Brouwer's fix-point-theorem: a $q \varepsilon S$ with $q = \mathcal{A}(q, \varepsilon)$ exists.
Put $\varepsilon = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \ldots$, and denote $\boxed{\text{one of the solutions of}}$ $q \varepsilon S$ with $q = \mathcal{A}(q, \varepsilon)$ by $q = q_v$. As $q_v \varepsilon S$, and S is closed and bounded, q_v, $v = 1, 2, \ldots$, has a convergent subsequence: q_{v_s}, $s = 1, 2, \ldots$: if $s \to \infty$ $v_s \to \infty$ and $q_{v_s} \to \bar{q}$. As S is closed, $\bar{q} \varepsilon S$.
Now $q_{v_s} = \mathcal{A}(q_{v_s}, \frac{1}{v_s})$, and so $\mathcal{A}(q_{v_s}, \frac{1}{v_s}) \to \bar{q}$, that is

$$\mathcal{F}\left(\frac{\int K(p, q_{v_s}, \frac{1}{v_s}) \; \xi(\mathcal{W}(p)) \, dp}{\int K(p, q_{v_s}, \frac{1}{v_s}) \, dp} \right) \to \bar{q}.$$

Now the argument of $\mathcal{F}(\ldots\ldots)$ lies obviously within the smallest convex set containing all $\xi(\mathcal{W}(p))$ for the p of $\mathcal{C}(q_{v_s}, \frac{1}{v_s})$. This sphere is $\subset \mathcal{C}(\bar{q}, \mathrm{Dist}(\bar{q}, q_{v_s}) + \frac{1}{v_s})$.
As p's distance from $\bar{q} \varepsilon S$ is $< \mathrm{Dist}(\bar{q}, q_{v_s}) + \frac{1}{v_s}$, its minimal distance from S is $<$ than this, that is its distance from $\mathcal{W}(p)$ is $<$ than this. Thus $\mathrm{Dist}(\bar{q}, \mathcal{W}(p))$ is $<$ than 2-times this. Puting

$$\eta_s = 2\left(\mathrm{Dist}(\bar{q}, q_{v_s}) + \frac{1}{v_s}\right),$$

so that $s \to \infty$ implies $\eta_s \to 0$, we see: The argument of $\mathcal{F}(\ldots\ldots)$ lies within the smallest convex set containing all $\xi(r)$ for the r of $\mathcal{C}(\bar{q}, \eta_s)$.
As all this lies in the closed bounded set S_c, a subsequence of v_s, $s = 1, 2, \ldots$, exists, for which the arguments of $\mathcal{F}(\ldots\ldots)$ converge to a limit $\bar{r}$, but as we may replace the v_s, $s = 1, 2, \ldots$, by this subsequence, we can assume, that already the original sequence of ~~the~~ arguments of $\mathcal{F}(\ldots\ldots)$ converges to $\bar{r}$.
~~Thus it lies for every $\mathcal{F}(\bar{r}) = \bar{q}$~~ Owing to the continuity of $\mathcal{F}(\ldots\ldots)$ this implies

$$\mathcal{F}(\bar{r}) = \bar{q}.$$

What we proved above shows, that $\bar{r}$ lies in the smallest convex set containing all $\xi(r)$, $r \varepsilon \mathcal{C}(\bar{q}, \eta_s)$, thus a fortiori in the smallest convex set containing

$$\sum_\mu x^*_\mu = 1,\ \sum_\nu y^*_\nu = 1,\ x^*_\mu \geq 0,\ y^*_\nu \geq 0,$$

which is a topological ($(m-1)+(n-1) = N-2$ - dimensional) simplex.

As the equation defining $(x', y') \varepsilon A(x,y)$ can be written in the form

$$\sum_\mu (f_\mu(x,y))^2 (x'_\mu)^2 + \sum_\nu (g_\nu(x,y))^2 (y'_\nu)^2 = 0,$$

the left side being a continuous function of x, y, x', y', the quasi-continuity is apparent.

Finally $F(\ldots)$ can be defined by $F(x,y) = (\bar{x}, \bar{y})$, where

$$\bar{x}_\mu = x_\mu,$$

$$\bar{y}_\mu = \frac{1}{\sum_\mu \sum_\rho a_{\mu\rho} x_\mu y_\rho} y_\nu.$$

One sees at once that this has all required properties.

Remark:

It is sufficient to consider the case of convex S and $A(p)$'s, that is Application 1., because Application 2. is reduced to it by means of the one-to-one a bi-continuous mapping

$$(x,y) \rightleftarrows (x^*, y^*),$$

which had been described there.

The proof remains essentially the same as in the general case, these two simplifications becoming possible:

α) the function $F(\ldots)$ can everywhere be replaced by its argument $\ldots$, that is $F(\ldots)$ drops out,

β) the integral $\int_{E^N} \ldots dp$ in N-dimensions can be replaced by the integral $\int_S \ldots dp$ in M-dimensions, where M is the dimensionality of S because S is convex, and thus is the closure of an open set in an M-dimensional plane; and simultaneously $\xi(p)$ can be replaced by p.

1. Sei $\mathfrak{G}$ eine Liesche Gruppe, $A \in \mathfrak{G} \to \mathfrak{D}(A)$ eine Darstellung durch n-dimensionale Matricen, $s = \limsup_{A \to 1} \|\mathfrak{D}(A) - E_n\|$ deren „Schwankung" bei 1. $s = 0$ bedeutet offenbar, dass $\mathfrak{D}(A)$ stetig ist; $s = +\infty$ kann, wie der Lebesgue-Steinitz-Schreier-Van der Waerdensche Isomorphismus zeigt, effektiv vorkommen; uns interessiert $s \neq +\infty$, d.h. $0 \leqq s < +\infty$. Dies werde also vorausgesetzt.
Wäre in beliebiger Nähe der 1 $\|\mathfrak{D}(A) - E_n\|$ beliebig gross, so existierte eine Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{G}$ mit $A_\nu \to 1$, $\|\mathfrak{D}(A_\nu) - E_n\| \to +\infty$, so dass $s = \limsup_{A \to 1} \|\mathfrak{D}(A) - E_n\| \geq \limsup_{\nu \to +\infty} \|\mathfrak{D}(A_\nu) - E_n\| = +\infty$, $s = +\infty$ wäre.
Also existiert eine Umgebung $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{G}$ von 1, in der $\mathfrak{D}(A) - E_n$, also auch $\mathfrak{D}(A)$ selbst, beschränkt ist.
Sei $\mathfrak{J}$ die infinitesimalgruppe von $\mathfrak{G}$, $I_1, \ldots, I_m$ deren Basis (also $\mathfrak{G}$ m-parametrig). Dann stellt $A = \exp(x_1 I_1 + \cdots + x_m I_m)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von 1 $\mathfrak{G}$ eineindeutig (und stetig) dar — $x_1, \ldots, x_m$ laufen dann über ein Kugelinneres mit dem Mittelpunkte $0, \ldots, 0$. Indem wir $\mathfrak{U}$ gegebenenfalls verkleinern, können wir erreichen, dass $\mathfrak{U}$ diese Umgebung sei.

21. Seien $A_1, \ldots, A_l$ feste Elemente von $\mathfrak{G}$, wir bilden die Menge $M(A_1, \ldots, A_l) \subseteq \mathfrak{G}$ aller $\prod_{\lambda=1}^{l} B_\lambda A_\lambda B_\lambda^{-1} A_\lambda^{-1}$ $(B_1, \ldots, B_l \in \mathfrak{U})$, an die analoge Bildung von Van der Waerden anschliessend.
Wir behaupten: wenn $D(A_1), \ldots, D(A_l)$ nahe genug bei E_n liegen, liegt das ganze D-Bild von $M(A_1, \ldots, A_l)$ in einer Kugel $\|X - E_n\| < \delta$ ($\delta > 0$ gegeben). Denn sonst gäbe es ein $\delta > 0$ und l Folgen $A_1^{(\nu)}, \ldots, A_l^{(\nu)}$ mit $\mathfrak{D}(A_1^{(\nu)}) \to E_n, \ldots, \mathfrak{D}(A_l^{(\nu)}) \to E_n$, so dass das D-Bild von $M(A_1^{(\nu)}, \ldots, A_l^{(\nu)})$ nie in $\|X - E_n\| < \delta$ liegt, d.h. dass für jedes ν $B_1^{(\nu)}, \ldots, B_l^{(\nu)} \in \mathfrak{U}$ mit $\|X^{(\nu)} - E_n\| \geqq \delta$ für
$X^{(\nu)} = \mathfrak{D}\left(\prod_{\lambda=1}^{l} B_\lambda^{(\nu)} A_\lambda^{(\nu)} B_\lambda^{(\nu)-1} A_\lambda^{(\nu)-1}\right) = \prod_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{D}(B_\lambda^{(\nu)}) \mathfrak{D}(A_\lambda^{(\nu)}) \mathfrak{D}(B_\lambda^{(\nu)})^{-1} \mathfrak{D}(A_\lambda^{(\nu)})^{-1}$ existieren.
Aus $B_1^{(\nu)}, \ldots, B_l^{(\nu)} \in \mathfrak{U}$ folgt, dass die $\mathfrak{D}(B_1^{(\nu)}), \ldots, \mathfrak{D}(B_l^{(\nu)})$ beschränkt sind, also ~~konvergieren~~ existiert eine Teilfolge der ν, für die jede der l Folgen $\mathfrak{D}(B_1^{(\nu)}), \ldots, \mathfrak{D}(B_l^{(\nu)})$ konvergiert. Wir können daher annehmen, dass dies schon für die ν-Folge der Fall war: $\mathfrak{D}(B_1^{(\nu)}) \to Y_1, \ldots, \mathfrak{D}(B_l^{(\nu)}) \to Y_l$. (Da $B_\lambda^{(\nu)-1}$ zu $\mathfrak{U}$ gehört, sind auch die $\mathfrak{D}(B_\lambda^{(\nu)-1}) = \mathfrak{D}(B_\lambda^{(\nu)})^{-1}$ beschränkt, also existieren die Y_λ^{-1}.) Zusammen mit $\mathfrak{D}(A_1^{(\nu)}) \to E_n, \ldots, \mathfrak{D}(A_l^{(\nu)}) \to E_n$ ergibt das $X^{(\nu)} \to E_n$, $\|X^{(\nu)} - E_n\| \to 0$, entgegen $\|X^{(\nu)} - E_n\| \geqq \delta$.
Also gilt die obige Behauptung.

22. Seien nun $J_1, \ldots, J_l$ Elemente der Infinitesimalgruppe, $A_1^{(t)} = \exp(t J_1), \ldots, A_l^{(t)} = \exp(t J_l)$. Ist t klein genug, so liegen $A_1, \ldots, A_l$ in $\mathfrak{U}$, also sind dann $D(A_1^{(t)}), \ldots, \mathfrak{D}(A_l^{(t)})$ beschränkt. Da t auch dann noch unendlich vieler Werte fähig ist, haben die l-Matrix-Systeme

$\mathfrak{D}(A_1^{(t)}), \dots, \mathfrak{D}(A_\ell^{(t)})$ (als Punkte im ℓn^2-dimensionalen Raume betrachtet) einen Häufungspunkt. Es gibt daher eine t-Folge $t_1, t_2, \dots$ (im genannten t-Intervalle), so dass die Matricen-Folgen $\mathfrak{D}(A_1^{(t_\nu)}), \dots, \mathfrak{D}(A_\ell^{(t_\nu)})$ konvergieren. (Da auch $A_\lambda^{(-t)} = A_\lambda^{(t)\,-1}$ in $\mathfrak{U}$ liegt, also $\mathfrak{D}(A_\lambda^{(t_\nu)\,-1}) = \mathfrak{D}(A_\lambda^{(t_\nu)})^{-1}$ beschränkt ist, haben die Limites Reciproke.) Ersetzen wir die t_ν durch eine Teilfolge, so können wir erreichen, dass auch diese konvergiert; wir können daher annehmen, dass dies schon für die ursprüngliche t_ν-Folge der Fall war, die dabei aus lauter verschiedenen t_ν besteht.

Also: $t_{\nu+1} - t_\nu \to 0$, $\neq 0$, $\mathfrak{D}(A_\lambda^{(t_{\nu+1}-t_\nu)}) = \mathfrak{D}(A_\lambda^{t_{\nu+1}})\,\mathfrak{D}(A_\lambda^{t_\nu})^{-1} \to E_n$.

Oder: Es gibt beliebig kleine t, aber $t \neq 0$, für die $\mathfrak{D}(A_1^{(t)}), \dots, \mathfrak{D}(A_\ell^{(t)})$ alle beliebig nahe bei E_n liegen.

23. Aus 21. und 22. folgt zusammenfassend: Für jedes $\delta > 0$ gibt es beliebig kleine t, aber $t \neq 0$, so dass das ganze D-Bild von $M(A_1^{(t)}, \dots, A_\ell^{(t)})$ in der Kugel $\| X - E_n \| < \delta$ liegt.

31. In der Infinitesimalgruppe $\mathfrak{I}$ bestimmen alle Kommutatoren $[I', I''] = I'I'' - I''I'$, $I', I'' \in \mathfrak{I}$, eine Linearmannigfaltigkeit $\bar{\mathfrak{I}} \subseteq \mathfrak{I}$, die Kommutatoren-Infinitesimalgruppe. Diese sei ℓ-dimensional, $\ell \leq m$, und $[I_1', I_1''], \dots, [I_\ell', I_\ell'']$ eine Basis von ihr. Wir bilden nun die $A_1^{(t)}, \dots, A_\ell^{(t)}$ von 22. mit $J_1 = I_1', \dots, J_\ell = I_\ell'$, also $A_1^{(t)} = \exp(t I_1'), \dots, A_\ell^{(t)} = \exp(t I_\ell')$.

Ferner setzen wir $B_1^{(\tau)} = \exp(\tau y_1 I_1''), \dots, B_\ell^{(\tau)} = \exp(\tau y_\ell I_\ell'')$, wobei $y_1, \dots, y_\ell$ vorläufig fest seien. τ sei so klein, dass die $B_\lambda^{(\tau)}$ alle in $\mathfrak{U}$ liegen.

Nun sei $C^{(t,\tau)} = \prod_{\lambda=1}^{\ell} B_\lambda^{(\tau)} A_\lambda^{(t)} B_\lambda^{(\tau)-1} A_\lambda^{(t)-1}$, es gehört zu $M(A_1^{(t)}, \dots, A_\ell^{(t)})$.

32. Für $\tau \to 0$ ist $B_\lambda^{(\tau)} \to 1$, also $C^{(t,\tau)} \to 1$. Es ist $\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(t,\tau)}$ dabei offenbar gleich

$$\sum_{\lambda=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(B_\lambda^{(\tau)} A_\lambda^{(t)} B_\lambda^{(\tau)-1} A_\lambda^{(t)-1} \right) = \sum_{\lambda=1}^{\ell} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} B_\lambda^{(\tau)} - \frac{\partial}{\partial \tau} A_\lambda^{(t)} B_\lambda^{(\tau)} A_\lambda^{(t)-1} \right) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\ell} \left(y_\lambda I_\lambda'' - [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, y_\lambda I_\lambda'' \right) = \sum_{\lambda=1}^{\ell} y_\lambda \left(I_\lambda'' - [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda'' \right)$$

~~Wenn wir also~~

$$\cancel{I_\lambda'' - [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda'' = \sum_{\rho=1}^{m} a_{\rho\lambda}(t)\, I_\rho}$$

~~setzen, so ist das Infinitesimalgruppen-Element~~ $\cancel{\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(t,\tau)}}$ ~~gleich~~

$$\cancel{\sum_{\rho=1}^{m} \left(\sum_{\lambda=1}^{\ell} a_{\rho\lambda}(t)\, y_\lambda \right) I_\rho .}$$

Nun ist, wie man leicht erkennt, $I_\lambda'' - [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda''$ für $t = 0$ gleich 0, und für beliebiges t sein $\frac{\partial}{\partial t}$ gleich $-[\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}] \cdot [I_\lambda', I_\lambda''] = -[[\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda', [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda'']$, also ein Kommutator. Somit ist $I_\lambda'' - [\text{Adj. Gr. El. } A_\lambda^{(t)}]\, I_\lambda''$ stets ein Kommutator, also eindeutig als

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_{\lambda i}(t)\, [I_i', I_i'']$$

schreibbar.

Insbesondere folgt aus ihrem Werte für $t = 0$, sowie der $\frac{\partial}{\partial t}$-Formel für $t=0$: $a_{\lambda i}(t) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} a_{\lambda i}(t) \begin{cases} = 1, & \text{für } \lambda = i \\ = 0, & \text{für } \lambda \neq i \end{cases}$ für $t=0$. Somit ist für $t \to 0$ $a_{\lambda i} \begin{cases} = t + o(t), & \text{für } \lambda = i \\ = o(t), & \text{für } \lambda \neq i \end{cases}$, und die Determinante

$$\mathrm{Det}\, |a_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} = t^{\ell}\, \mathrm{Det}\, \left|\frac{a_{\lambda i}}{t}\right|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} = t^{\ell}(1 + o(1)).$$

Für hinreichend kleines t ist also $\mathrm{Det}\, |a_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} \neq 0$.

Alle diese Formeln zusammenfassend haben wir somit: Das Infinitesimal-Gruppen-Element $\frac{\partial}{\partial \tau} C^{(t,\tau)}$ ($\tau = 0$) ist gleich

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{\lambda=1}^{\ell} a_{\lambda i}(t)\, y_\lambda \right) [I'_i, I''_i],$$

und für hinreichend kleines t ist $\mathrm{Det}\, |a_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} \neq 0$.

33. $C^{(t,\tau)}$ gehört, als Kommutatoren-Produkt, zum von $\bar{J}$ bestimmten ~~[illegible]~~ $\mathfrak{G}$, und wenn t, τ klein genug sind, ist es eindeutig als $\exp\left(\sum_{\lambda=1}^{\ell} z_\lambda [I'_\lambda, I''_\lambda] \right)$ schreibbar. Es ist dabei tatsächlich $z_\lambda = z_\lambda(t, \tau; y_1, \dots, y_\ell)$.

Die Schlussformel von 32. besagt: für $\tau = 0$ ist $z_i = 0$, $\frac{\partial}{\partial \tau} z_i = \sum_{\lambda=1}^{\ell} a_{\lambda i}(t)\, y_\lambda$. Also $\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda} = a_{\lambda i}(t)$. Also für $\tau \to 0$ $\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda} = a_{\lambda i}(t)\,\tau + o(\tau)$, und $\det \left|\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda}\right|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} = \tau^{\ell} \det \left|\frac{1}{\tau}\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda}\right|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)}$ ~~[illegible]~~ $= \tau^{\ell} \left(\det |a_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} + o(1) \right)$. Ist also t so klein, dass $\det |a_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} \neq 0$ ist, so ist für hinreichend kleines τ auch $\det \left|\frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda}\right|_{(\lambda, i = 1,\dots,\ell)} \neq 0$.

Aber dies ist die Funktionaldeterminante der Abbildung

$$y_1, \dots, y_\ell \to z_1, \dots, z_\ell,$$

somit ist diese in einer Umgebung von $y_1, \dots, y_\ell = 0, \dots, 0$ und $z_1, \dots, z_\ell = 0, \dots, 0$ eineindeutig. Dann überdecken also die $z_1, \dots, z_\ell$ eine ganze Umgebung von $0, \dots, 0$; d.h. die $C^{(t,\tau)}$ eine ganze Umgebung der 1 in dem von $\bar{J}$ bestimmten Untergrup- ~~[illegible]~~ pen-Keim $\bar{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$.

Also: wenn t klein genug ist, kann τ so klein gewählt werden, dass die $C^{(t,\tau)}$ eine Umgebung der 1 in $\bar{\mathfrak{G}}$ überdecken, oder: dann ist in $\bar{\mathfrak{G}}$ 1 (relativ-) innerer Punkt von $M(A_1^{(t)}, \dots, A_\ell^{(t)})$.

V | Untergruppen-Keim $\bar{\mathfrak{G}}$ von

41. Aus 23. und 33. folgt: Wenn ein $\delta > 0$ gegeben ist, so können $A_1, \dots, A_\ell$ so gewählt werden (nämlich als $A_1^{(t)}, \dots, A_\ell^{(t)}$ mit geeignetem t, vgl. dort), dass das D-Bild von $M(A_1, \dots, A_\ell)$ ganz in der Kugel $\| X - E_n \| < \delta$ liegen, und $M(A_1, \dots, A_\ell)$ in $\bar{\mathfrak{G}}$ 1 zum (relativ-) inneren Punkte hat. D.h. in einer geeigneten Umgebung von 1 in $\bar{\mathfrak{G}}$ gilt durchweg $\| D(A) - E_n \| < \delta$. Mit anderen Worten: in $\bar{\mathfrak{G}}$ ist $A \in \bar{\mathfrak{G}} \to D(A)$

an der Stelle 1 stetig.

42. Da $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Gruppen-Keim ist, und $\mathfrak{D}(A)$ eine Darstellung, folgt hieraus sofort, dass $\mathfrak{D}(A)$ überall in $\overline{\mathfrak{G}}$ (als Funktion in $\overline{\mathfrak{G}}$) stetig ist. Und da $\overline{\mathfrak{G}}$ Liesch ist, folgt hieraus nach den bekannten Methoden, dass $\mathfrak{D}(A)$ innerhalb $\overline{\mathfrak{G}}$ sogar analytisch von den (reellen) Parametern von A abhängt.

43. Da $\overline{\mathfrak{G}}$ alle Kommutatoren von $\mathfrak{G}$ enthält, ist es ein Normalteiler, und $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{G}}$ ist Abelsch. Man beachte, dass $\overline{\mathfrak{G}}$ als Gruppen-Keim, und nicht als Gruppe zu behandeln ist, d.h. seine Elemente $\prod_{\lambda=1}^{k}(A_\lambda B_\lambda A_\lambda^{-1} B_\lambda^{-1})$ sind so zu bilden, das die A_λ, B_λ auf ein beliebiges, aber festzuhaltendes kompaktes Teil von $\mathfrak{G}$ beschränkt bleiben. (Ohne diese Beschränkung wäre es nicht einmal abgeschlossen.)

1. A number $N = 2, 3, \ldots$ is given.

S is the set of all $i = 1, \ldots, N$.

Π is the set of all permutations P of S: $i \to Pi$.

T is the set of all tetrads or pairs of pairs $\mu = (i, j ; k, l)$ from S.

Let a sequence of tetrads $\mu^u = (i^u, j^u ; k^u, l^u)$, $u = 1, \ldots, U$, be given, and along with this a sequence of factors A^u, B^u, C^u.

Define

$$f^u(P) \begin{cases} = A^u & \text{if } Pi^u = j^u,\ Pk^u = l^u, \\ = B^u & \text{if } Pi^u = j^u,\ Pk^u \neq l^u, \\ & \text{or } Pi^u \neq j^u,\ Pk^u = l^u, \\ = C^u & \text{if } Pi^u \neq j^u,\ Pk^u \neq l^u. \end{cases}$$

Actually

$$0 < B^u < C^u < A^u .$$

Next

$$F(P) \equiv \prod_u f^u(P) .$$

The problem is to find

$$F^* = \operatorname*{Max}_P F(P) ,$$

and at least one P such that

$$F(P) = F^* .$$

2. We may equally well use

$$\begin{aligned} g^u(P) &= \ln f^u(P) , \\ G(P) &= \ln F(P) , \\ G^* &= \ln F^* . \end{aligned}$$

Put

$$a^u = \ln A^u,\ b^u = \ln B^u,\ c^u = \ln C^u ,$$

then

$$g^u(P) \begin{cases} = a^u & \text{if } Pi^u = j^u,\ Pk^u = l^u, \\ = b^u & \text{if } Pi^u = j^u,\ Pk^u \neq l^u, \\ & \text{or } Pi^u \neq j^u,\ Pk^u = l^u, \\ = c^u & \text{if } Pi^u \neq j^u,\ Pk^u \neq l^u, \end{cases}$$

and

$$G(P) \equiv \sum_u g^u(P) \quad ,$$
$$G^* \quad = \operatorname*{Max}_P G(P) \; .$$

Also

$$b^u < c^u < a^u .$$

Put

$$\alpha^u = a^u - c^u \quad (>0) \, ,$$
$$\beta^u = c^u - b^u \quad (>0) \; .$$

There is no change in the nature of the problem, if we replace $g^u(P)$ by

$$h^u(P) = g^u(P) - c^u =$$

$$\begin{cases} = \alpha^u & \text{if} \quad Pi^u = j^u, \; Pk^u = l^u , \\ = -\beta^u & \text{if} \quad Pi^u = j^u, \; Pk^u \neq l^u , \\ & \text{or} \quad Pi^u \neq j^u, \; Pk^u = l^u , \\ = 0 & \text{if} \quad Pi^u \neq j^u, \; Pk^u \neq l^u , \end{cases}$$

and correspondingly $G(P)$ by

$$H(P) \; = \; \sum_u h^u(P) \equiv G(P) - \sum_u c^u \, ,$$

as well as G^* by

$$H^* \quad = \operatorname*{Max}_P H(P) = G^* - \sum_u c^u \; .$$

3. Consider the N^2-dimensional Eucledian space of all matrices

$$x \quad = \quad (x_{ij}) \qquad\qquad (i,j = 1, \cdots, N) \, .$$

Let P correspond to the matrix

$$x^P = \quad (x^P_{ij}) \, ,$$

where $x^P_{ij} = \delta_{Pi,j} \begin{cases} = 1 & \text{if} \quad Pi = j \, , \\ = 0 & \text{if} \quad Pi \neq j \, . \end{cases}$

Form a function $\bar{h}^u(\xi)$ such that

$$\bar{h}^u(\xi) \begin{cases} = \quad \alpha^u & \text{if} \quad \xi = 2 \quad , \\ = -\beta^u & \text{if} \quad \xi = 1 \, , \\ = \quad 0 & \text{if} \quad \xi = 0 \, , \end{cases}$$

and put

$$\bar{\bar{h}}^u(x) \equiv \bar{h}\,(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) .$$

Then

$$h^u(P) = \bar{\bar{h}}^u(x^P) .$$

Hence, if we put

$$\bar{\bar{H}}(x) \equiv \sum_u \bar{\bar{h}}^u(x) ,$$

then

$$H(P) \equiv \bar{\bar{H}}(x^P) .$$

The requirement for $\bar{h}^u(\xi)$ is satisfied by

$$\bar{h}^u(\xi) \equiv ((\tfrac{1}{2}\alpha^u + \beta^u)\xi - (\tfrac{1}{2}\alpha^u + 2\beta^u))\xi .$$

Hence, putting

$$\gamma^u = \tfrac{1}{2}\alpha^u + \beta^u ,$$
$$\delta^u = \tfrac{1}{2}\alpha^u + 2\beta^u ,$$

we have

$$\bar{\bar{H}}(x) \equiv \sum_u (\gamma^u(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) - \delta^u)(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) .$$

One more transformation will turn out to be useful. Put

$$K(x) \equiv \sum_u (\gamma^u(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) - \delta^u)(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) + \eta \sum_{ij} x_{ij} ,$$

where η will be chosen later.

Since $\sum_{ij} x^P_{ij} = N$ for all P, therefore

$$K(x^P) = \bar{\bar{H}}(x^P) + N\eta .$$

Hence

$$H(P) \equiv K(x^P) - N\eta ,$$

and, if we define

$$K^* = \operatorname*{Max}_P K(x^P) ,$$

then

$$H^* = K^* - N\eta .$$

4. $K(x)$ can also be written in this form:

$$K(x) \equiv \sum_u \gamma^u (x_{i^u j^u} + x_{k^u l^u})^2 + \\ + \sum_{ij} \Big(\eta - \Big\{ \sum_{\substack{i^u = i \\ j^u = j}} \delta^u + \sum_{\substack{k^u = i \\ l^u = j}} \delta^u \Big\}\Big) x_{ij} \, .$$

Now put

$$\eta = \operatorname*{Max}_{ij} \Big(\sum_{\substack{i^u = i \\ j^u = j}} \delta^u + \sum_{\substack{k^u = i \\ l^u = j}} \delta^u \Big) .$$

Then $K(x)$ is clearly a monotone-increasing and convex-from-below function of the entire variable-system x_{ij} $(i,j = 1, \cdots, N)$, i.e. of the matrix-variable X, in the domain where all $x_{ij} \geqq 0$.

Now

$$K^* = \operatorname*{Max}_{x \text{ in } \Omega_1} K(x) ,$$

where Ω_1 is the set of all x^P, P in Π.

Since $K(x)$ is convex-from-below, we have equally

$$K^* = \operatorname*{Max}_{x \text{ in } \Omega_2} K(x) ,$$

where Ω_2 is the convex spanned by Ω_1, and this extension does not introduce any (additional) relative maxima. It is well known, that Ω_2 is the set of all $x = (x_{ij})$ with

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sum_j x_{ij} = 1 & \text{for all } i , \\ \sum_i x_{ij} = 1 & \text{for all } j , \\ x_{ij} \geqq 0 & \text{for all } i, j . \end{cases}$$

Since $K(x)$ is monotone-increasing, we have further equally

$$K^* = \operatorname*{Max}_{x \text{ in } \Omega_3} K(x) ,$$

where Ω_3 is the set of all $x = (x_{ij})$, such that for some $y = (y_{ij})$ in Ω_2

$$0 \leqq x_{ij} \leqq y_{ij} \quad \text{for all } i, j ,$$

and this extension, too, does not introduce any (additional) relative maxima.

It is well known, that Ω_3 is the set of all $x = (x_{ij})$ with

~~for all~~

~~(II)~~ ~~for all~~

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sum_j x_{ij} \leqq 1 & \text{for all } i, \\ \sum_i x_{ij} \leqq 1 & \text{for all } j, \\ x_{ij} \geqq 0 & \text{for all } i,j. \end{cases}$$

Finally, we can equally well use the definition

$$K^* = \operatorname*{Max}_{\Omega_4} K(x),$$

where Ω_4 is any set $\geqq \Omega_2, \leqq \Omega_3$.

We choose Ω_4 as the set of all $x = (x_{ij})$ with

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \operatorname{Max}\left(\sum_j x_{ij} \text{ for all } i, \sum_i x_{ij} \text{ for all } j\right) = 1, \\ x_{ij} \geqq 0 \quad \text{for all } i,j. \end{cases}$$

It is immediately seen, that this, too, introduces no (additional) relative maxima.

Now assume only

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x_{ij} \geqq 0 \quad \text{for all } i,j, \\ \text{but not} \\ x_{ij} = 0 \quad \text{for all } i,j. \end{cases}$$

Put

$$|x| = \operatorname{Max}\left(\sum_j x_{ij} \text{ for all } i, \sum_i x_{ij} \text{ for all } j\right).$$

Then Ω_4 is defined by $|x| = 1$.

Hence restricting x to Ω_4 may be replaced by leaving x free in (IV), and then using $\frac{x}{|x|}$ in place of x in $K(x)$. I.e.

$$K^* = \operatorname*{Max}_{x} K\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Again, there are no relative maxima.

In this last form of K^*, however, $K\left(\frac{x}{|x|}\right)$ is a positive-homogenous function of the variable-system x_{ij} $(i,j = 1, \cdots, n)$, i.e. of the matrix-variable x (always in (IV)). Hence x may now be viewed as a direction, i.e. the x_{ij} $(i,j = 1, \cdots, n)$ as positive-homogenous coordinates.

5. We summarize:

Form

$$\alpha^u = \ln \frac{A^u}{C^u} (>0), \beta^u = \ln \frac{C^u}{B^u} (>0),$$

$$\gamma^u = \tfrac{1}{2}\alpha^u + \beta^u, \quad \delta^u = \tfrac{1}{2}\alpha^u + 2\beta^u,$$

$$\eta = \operatorname*{Max}_{i,j} \Big(\sum_{\substack{i^u = i \\ j^u = j}} \delta^u + \sum_{\substack{k^u = i \\ \ell^u = j}} \delta^u \Big),$$

$$K(x) \equiv \sum_u (\gamma^u (x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) - \delta^u)(x_{i^u j^u} + x_{k^u \ell^u}) + \eta \sum_{ij} x_{ij}$$

$$|x| = \operatorname{Max} \Big(\sum_j x_{ij} \text{ for all } i, \sum_i x_{ij} \text{ for all } j \Big).$$

Then

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

for $x = (x_{ij})$ with all $x_{ij} \geqq 0$, but not all $x_{ij} = 0$, is positive-homogenous in the x_{ij}, i.e. these may be viewed as positive-homogenous coordinates.

The function

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

has only absolute maxima. Any absolute maximum x, will, when normalized to

$$|x| = 1$$

have these properties:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{for all } i,$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{for all } j.$$

Hence $x = (x_{ij})$ is a center of gravity of certain x^P, P in Π. All the P which occur here (with positive weights) are maxima of $K(x^P)$, hence also of $H(P) \equiv K(x^P) - N\eta$, hence also of $G(P) \equiv H(P) - \sum_u \ln C^u$, and of $F(P) \equiv e^{G(P)}$. Combining these formulae gives

$$F(P) \equiv \Big(\prod_u C^u \cdot e^{N\eta}\Big)^{-1} e^{K(x^P)}.$$

6. According to the above only one problem remains: Determining a maximum of $K\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Since all maxima of this function are absolute ones, some

(iterative) method of (local) ascent should be developed for the locating of maxima.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, Princeton, New Jersey
Office of the Director

C O P Y

11 December 1964

Dear Dr. Dix:

The Institute for Advanced Study is grateful to you for undertaking the custody of the unpublished papers and notes of John von Neumann, of which we have until now been custodians.

In the publication of the collected works of von Neumann, it is stated that these papers may be consulted by scholars at the Institute. From now on we should like to direct enquiries about them either to you or to a member of your staff whom you may designate.

With good wishes,

Robert Oppenheimer

original notarized

Dr. W. S. Dix
Firestone Library
Princeton University
Princeton, New Jersey

cc Miss Sachs

von Neumann Pub.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

PRINCETON, NEW JERSEY

REQUISITION FOR PAYMENT

Date 16 February 1961

Pay to IAS

Address

Approved by (Signature) [illegible] Amount $ 55.09

To be charged to Publications Fund

In payment of (Itemize)

Railway Express charges for
shipping von Neumann papers
to La Jolla, California, 2/9/61.....$55.09

Check No.

Batch No.

Extensions Chkd

Entered By

To Destination Office La Jolla Calif

Consignee Mrs C Ckeat — Date Shipped 5/9 1961 — Value Charges 23|00

Street Address or Non-Agency Destination 347 Vista De la Playa — Receipt Number 63-12-36 — Express Charges 37|89

Name of Forwarding Office (951-K) Princeton, N. J. (E) (09-07) — Declared Value 10000 — Refrigeration Charges

Other Charges |20

Piece-s	Article	Description	Weight
2	Bx	mss	134

Storage

Total 61|09

Shipper E A Berne

Class 1 — Paid Beyond XX | XXX

C. O. D.

Shipper's Street Address Inst for Adv — Receipt for Collection of Charges Prepaid — Scale or Rate 128 — Priced by W

C.O.D. Service Charge

Payment received by RAILWAY EXPRESS AGENCY, Inc., for charges entered hereon.

(Form 5083)

4 Jim Shorter — For the Company — Number Pieces 2 — Date 196 — Hour A. M. P. M.

CROSS REFERENCE

FILE: Faculty - von Neumann

RE: posthumous publication

LETTER DATED:

SEE: Inst. Gen: von Neumann Publication

Page proof for #45

Corrections have been made

II, 18

Pageproof for #46
corrections have been
made except that German
Caps asked for by v.N. were not
obtained

II, 19

page proof of
43 -
corrections have
been made in the paper

ZUSÄTZE ZUR ARBEIT „ZUR OPERATORENMETHODE ...“ [1, 2].

Von J. v. Neumann, Princeton.

1. Als erstes soll ein Versehen berichtigt werden, das dem Verf. beim Abfassen der zitierten Arbeit unterlaufen ist. Im Hauptsatz von Teil II, § 3, d. i. Satz 2 (der die Zerlegbarkeit aller Strömungen in ergodische Strömungen aussagt), wird u. a. behauptet, daß die dort konstruierten Mengen $X^{(0)}$ und $M(x)$ m-Räume sind[3], also u. a. vollständig[3]. Dabei wurde übersehen, daß die zu Satz 2 führende Konstruktion die Vollständigkeit nicht sicherstellt. Die Vollständigkeit ist aber insofern wichtig, als z. B. der zweite Teil von Satz 5[4] auf Satz 1 der vorhergehenden Abhandlung des Verf. beruht[5], der seinerseits die Vollständigkeit als Prämisse hat.

Da jeder G_δ-Raum bekanntlich so ummetrisiert werden kann, daß seine Topologie ungeändert bleibt und er vollständig wird[6], würde es genügen, $X^{(0)}$ und die $M(x)$ als G_δ-Mengen zu wählen, um diese Lücke auszufüllen — was in der Tat durchführbar ist. Wir ziehen aber vor, zu zeigen, daß die Vollständigkeit für unsere Zwecke, d. h. für die Gültigkeit von Satz 1, 2 und 3, a. a. O. Anm.[5], entbehrlich ist — d. h. daß der Begriff des „m-Raumes“ ohne sie[7] gefaßt werden kann. Dies ist erwiesen, wenn es uns gelingt, einen metrisch separablen Raum Ω, in dem ein l-Maß μ^* definiert ist, derart zu einem metrischen, separablen und vollständigen Raume $\bar{\Omega}$ mit einem l-Maß $\bar{\mu}^*$ zu erweitern, daß $\bar{\mu}^*$ für Mengen $\subset \Omega$ mit μ^* übereinstimmt und $\bar{\mu}^*(\bar{\Omega}-\Omega)=0$ ist. (Denn dann überträgt sich die Prämisse von Satz 1 ohne weiteres von Ω, Ω' auf $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$ und seine Aussage von $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$ auf Ω, Ω'. Dasselbe gilt für Satz 2 ebendort, allerdings ist dort die Existenz einer eineindeutigen Abbildung von $\bar{\Omega}-\Omega$ auf $\bar{\Omega}'-\Omega'$ notwendig, was z. B. sicher geht, wenn beide die Mächtigkeit des Kontinuums haben[8].) Satz 3 gilt auch, da er direkt aus Satz 2 folgt.)

[1] Annals of Math., Bd. 33, 3. Heft (1932), S. 587–642.

[2] Received September 6, 1932.

[3] Vgl. die Definition D_1 auf S. 588 a. a. O.

[4] S. 629 a. a. O.

[5] Annals of Math., Bd. 33, 3. Heft (1932), S. 574–586; vgl. insbesondere Def. 1–5 und Satz 5.

[6] Vgl. z. B. Hausdorff, „Mengenlehre“ (Berlin und Leipzig, 1927), S. 214, Satz III.

[7] D. h. als metrisch und separabel.

[8] Sei C die nirgendsdichte Cantorsche perfekte Menge in ihrer ursprünglichen Topologie, $\bar{\mu}^*$ werde für alle Teilmengen von C gleich X definiert. Wir fügen $\bar{\Omega}$, C zu $\bar{\bar{\Omega}}$ zusammen, u. zw. unter Beibehaltung ihrer Topologien und $\bar{\mu}^*$, aber voneinander isoliert. Dann spielt $\bar{\bar{\Omega}}$ die Rolle von $\bar{\Omega}$, und $\bar{\bar{\Omega}}-\Omega\supset C$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

absolute

del.

, sowie, wie sich zeigen wird, absolut Borelsch.

X 0

Für den Herrn Setzer: die Zahl Null nicht der Buchstabe O!

Für den Herrn Setzer:

Bitte in die richtige Höhe zurückrücken!

Bitte auseinanderrücken!

Wählen wir $\bar{\Omega}$ als vollständige Hülle von Ω[9] und definieren für die $M \subset \bar{\Omega}$ $\bar{\mu}^*(M) = \mu^*(M \cdot \Omega)$ $(M \cdot \Omega \subset \Omega)$, so ist alles Gewünschte erfüllt, bloß bezüglich des l-Maß-Charakters des neuen $\bar{\mu}^*$ sind I., V.[10] zu verifizieren. Dies gelingt in der Tat:

Ad I.: Ist K eine Kugel in $\bar{\Omega}$ mit einem Mittelpunkt aus Ω, so ist $K \cdot \Omega$ eine Kugel in Ω, also $\bar{\mu}^*(K) = \mu^*(K \cdot \Omega)$ endlich; gehört der Mittelpunkt von K nicht zu Ω, so ist doch K Teilmenge einer solchen Kugel, also $\bar{\mu}^*(K)$ wieder endlich.

Ad V.: Dies braucht nach Anm.[9] a. a. O. nur mit Borelschen O bewiesen zu werden. Wenn Ω absolut Borelsch ist, d. h. Borelsch in seiner vollständigen Hülle $\bar{\Omega}$[11], so schließen wir so: Zu $M \subset \bar{\Omega}$, also $M \cdot \Omega \subset \Omega$, gibt es ein in Ω, also auch in $\bar{\Omega}$ Borelsches $N \supset M \cdot \Omega$ mit $\mu^*(N) = \mu^*(M \cdot \Omega)$. Dann ist $N + (\bar{\Omega} - \Omega)$ auch Borelsch, $\supset M$, und sein $\bar{\mu}^*$ gleich $\mu^*(N) = \mu^*(M \cdot \Omega) = \bar{\mu}^*(M)$, was zu beweisen war.

Wir haben also gezeigt:

Die wesentlichen Sätze 1, 2 und 3 aus der in Anm.[5] zitierten Arbeit gelten auch, wenn der Begriff des m-Raumes weiter gefaßt wird: indem neben der Metrizität und Separabilität keine Vollständigkeit, sondern bloß absolut Borelscher Charakter[11] gefordert wird.

Zu Satz 2 der in Anm.[1] zitierten Arbeit ist dann zu sagen: da die $M(x)$ (in Ω) Borelsch sind, sind sie in diesem Sinne gleichzeitig mit Ω m-Räume ($X^{(0)}$ kann durch seinen maßgleichen F_σ-Kern ersetzt werden, es ist also auch Borelsch, d. h. m-Raum). Im neuen Sinne gilt also Satz 2 ohne weiteres.

2. Im Zusammenhange mit dem Problemkreise des Ergodensatzes sind noch zwei Abhandlungen von Herrn T. Carleman zu nennen, die nach Abfassung der w. o. zitierten Arbeiten des Verf. erschienen sind:

I. Application de la théorie des Équations intégrales linéaires aux équations différentielles de la dynamique, Arkiv för Mat., Astr. och Fys., 22 B (1932), No. 7, S. 1–5, eingegangen am 27. Mai 1931, erschienen am 2. März 1932;

II. Application ··· aux systèmes d'équations différentielles non linéaires, Acta Math., 59 (1932), S. 63–87, eingegangen am 10. Februar 1932, erscheint demnächst.

Carleman gelangt in diesen Abhandlungen unabhängig zu Koopmans Operatorenansatz und ~~zum~~ zu einem, mit demjenigen des Verf. verwandten Beweise des Ergodensatzes[12] unter Beschränkung

del.

[9] Vgl. Hausdorff, S. 106–107.

[10] Aus Def. 2, a. a. O., Anm. [5].

[11] Vgl. Hausdorff, S. 121 und 208.

[12] Vgl. die Arbeit des Verf., Proc. Nat. Ac., Bd. 18, Jan. 1932, S. 70; sowie Teil II, § 2 der in Anm. [1] zitierten.

auf differentiierbare Strömungen. Da für diese der zur Schar U_t gehörige Operator R (vgl. zur Bezeichnung die Arbeit des Verf. a. a. O. Anm. [1], S. 592, und die zweitvorhergehende, S. 571, sowie a. a. O. Anm. [12], S. 71) direkt angebbar und seine Hypermaximalität leicht beweisbar ist, kann der Stonesche Satz vermieden und unmittelbar die Theorie des Spektrums von R benutzt werden. Diesen Weg schlägt Carleman ein.

Indessen ist sein Beweisverfahren in I. wesentlich lückenhaft, denn seine Betrachtungen beruhen auf der dortigen Formel (4), welche bei den meisten Strömungen unrichtig ist. In der Tat zeigt der Vergleich von (4) mit der vom Verf. benutzten Form Spektraltheorie, daß das dort auftretende $\theta(p_0, q_0 | \lambda)$ der Integralkern des Operators $1 - E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(\lambda > 0)$ bzw. $-E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(\lambda < 0)$ sein muß. Bereits auf der Energiefläche des harmonischen linearen Oscillators besitzen aber die genannten Operatoren überhaupt keinen Integralkern. (In Carlemans Ausdrucksweise ist dann $n = 1$, $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $x_1 = 0$ mit $x_1 = 1$ zu identifizieren, $A_1 = 1$ — d. h. $\Omega(U) = i\frac{dU}{dx_1}$, falls die Einheiten geeignet gewählt werden. Es liegt also ein reines Punktspektrum bei $\frac{1}{\lambda} = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ vor, zu 0 gehört die Eigenfunktion 1. Somit wäre $\theta\left(p_0, q_0 \middle| \frac{1}{\pi}\right) - \theta\left(p_0, q_0 \middle| -\frac{1}{\pi}\right) + 1$ der Integralkern von $(1 - E(\pi)) - (-E(-\pi)) + P_{[1]} = 1 + P_{[1]} - (E(\pi) - E(-\pi)) = 1$, aber der Einheitsoperator 1 hat keinen Integralkern. Hierbei haben wir die Normierung $\theta(p_0, q_0 | 0) = 0$ wesentlich benutzt, aber andere Beispiele setzen auch diese nicht voraus.)

In II. wird dieser Fehler durch einen besonderen Kunstgriff (Einführung der Hilfsvariablen ξ, η an Stelle von p_0, q_0) vermieden. Die Rolle der Formel (4) von I. übernimmt die richtige Formel (19) von II., und der Beweis wird lückenlos.

ZUSÄTZE ZUR ARBEIT „ZUR OPERATORENMETHODE . . .“[1,2]

Von J. v. Neumann, Princeton.

1. Als erstes soll ein Versehen berichtigt werden, das dem Verf. beim Abfassen der zitierten Arbeit unterlaufen ist. Im Hauptsatz von Teil II, § 3, d. i. Satz 2 (der die Zerlegbarkeit aller Strömungen in ergodische Strömungen aussagt), wird u. a. behauptet, daß die dort konstruierten Mengen $X^{(0)}$ und $M(x)$ m-Räume sind[3], also u. a. vollständig[3]. Dabei wurde übersehen, daß die zu Satz 2 führende Konstruktion die Vollständigkeit nicht sicherstellt. Die Vollständigkeit ist aber insofern wichtig, als z. B. der zweite Teil von Satz 5[4] auf Satz 1 der vorhergehenden Abhandlung des Verf. beruht[5], der seinerseits die Vollständigkeit als Prämisse hat.

absolute

Da jeder G_δ-Raum bekanntlich so ummetrisiert werden kann, daß seine Topologie ungeändert bleibt und er vollständig wird[6], würde es genügen, $X^{(0)}$ und die $M(x)$ als G_δ-Mengen zu wählen, um diese Lücke auszufüllen — was in der Tat durchführbar ist. Wir ziehen aber vor, zu zeigen, daß die Vollständigkeit für unsere Zwecke, d. h. für die Gültigkeit von Satz 1, 2 und 3, a. a. O. Anm.[5], entbehrlich ist — d. h. daß der Begriff des „m-Raumes“ ohne sie[7] gefaßt werden kann. Dies ist erwiesen, wenn es uns gelingt, einen metrisch separablen Raum Ω, in dem ein l-Maß μ^* definiert ist, derart zu einem metrischen, separablen und vollständigen Raume $\bar{\Omega}$ mit einem l-Maß $\bar{\mu}^*$ zu erweitern, daß $\bar{\mu}^*$ für Mengen $\subset \Omega$ mit μ^* übereinstimmt und $\bar{\mu}^*(\bar{\Omega} - \Omega) = 0$ ist. (Denn dann überträgt sich die Prämisse von Satz 1 ohne weiteres von Ω, Ω' auf $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$ und seine Aussage von $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$ auf Ω, Ω'. Dasselbe gilt für Satz 2 ebendort, allerdings ist dort die Existenz einer eineindeutigen Abbildung von $\bar{\Omega} - \Omega$ auf $\bar{\Omega}' - \Omega'$ notwendig, was z. B. sicher geht, wenn beide die Mächtigkeit des Kontinuums haben[8].) Satz 3 gilt auch, da er direkt aus Satz 2 folgt.

del.

)

[1] Annals of Math., Bd. 33, 3. Heft (1932), S. 587–642.

[2] Received September 6, 1932.

[3] Vgl. die Definition D_1 auf S. 588 a. a. O.

[4] S. 629 a. a. O.

[5] Annals of Math., Bd. 33, 3. Heft (1932), S. 574–586; vgl. insbesondere Def. 1–5 und Satz 5.

[6] Vgl. z. B. Hausdorff, „Mengenlehre“ (Berlin und Leipzig, 1927), S. 214, Satz III.

[7] D. h. als metrisch und separabel.

[8] Sei C die nirgendsdichte Cantorsche perfekte Menge in ihrer ursprünglichen Topologie, $\bar{\mu}^*$ werde für alle Teilmengen von C gleich ~~0~~ definiert. Wir fügen $\bar{\Omega}$, C zu $\bar{\bar{\Omega}}$ zusammen, u. zw. unter Beibehaltung ihrer Topologien und $\bar{\mu}^*$, aber voneinander isoliert. Dann spielt $\bar{\bar{\Omega}}$ die Rolle von $\bar{\Omega}$, und $\bar{\bar{\Omega}} - \Omega \supset C$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

L	, sowie, wie sich w. u. zeigen wird, absolut Borelsch.
λ	0 ← für den Herrn Setzer: die Zahl Null, nicht der Buchstabe O.

Für den Herrn Setzer!

Bitte in die richtige Höhe hinunterschieben!

Wählen wir $\bar{\Omega}$ als vollständige Hülle von Ω^9 und definieren für die $M \subset \bar{\Omega}$ $\bar{\mu}^*(M) = \mu^*(M \cdot \Omega)$ $(M \cdot \Omega \subseteq \Omega)$, so ist alles Gewünschte erfüllt, bloß bezüglich des l-Maß-Charakters des neuen $\bar{\mu}^*$ sind I., V.[10] zu verifizieren. Dies gelingt in der Tat:

Bitte auseinanderrücken!

Ad I.: Ist K eine Kugel in $\bar{\Omega}$ mit einem Mittelpunkt aus Ω, so ist $K \cdot \Omega$ eine Kugel in Ω, also $\bar{\mu}^*(K) = \mu^*(K \cdot \Omega)$ endlich; gehört der Mittelpunkt von K nicht zu Ω, so ist doch K Teilmenge einer solchen Kugel, also $\bar{\mu}^*(K)$ wieder endlich.

Ad V.: Dies braucht nach Anm.[9] a. a. O. nur mit Borelschen O bewiesen zu werden. Wenn Ω absolut Borelsch ist, d. h. Borelsch in seiner vollständigen Hülle $\bar{\Omega}$[11], so schließen wir so: Zu $M \subset \bar{\Omega}$, also $M \cdot \Omega \subset \Omega$, gibt es ein in Ω, also auch in $\bar{\Omega}$ Borelsches $N \supset M \cdot \Omega$ mit $\mu^*(N) = \mu^*(M \cdot \Omega)$. Dann ist $N + (\bar{\Omega} - \Omega)$ auch Borelsch, $\supset M$, und sein $\bar{\mu}^*$ gleich $\mu^*(N) = \mu^*(M \cdot \Omega) = \bar{\mu}^*(M)$, was zu beweisen war.

Wir haben also gezeigt:

Die wesentlichen Sätze 1, 2 und 3 aus der in Anm.[5] zitierten Arbeit gelten auch, wenn der Begriff des m-Raumes weiter gefaßt wird: indem neben der Metrizität und Separabilität keine Vollständigkeit, sondern bloß absolut Borelscher Charakter[11] gefordert wird.

Zu Satz 2 der in Anm.[1] zitierten Arbeit ist dann zu sagen: da die $M(x)$ (in Ω) Borelsch sind, sind sie in diesem Sinne gleichzeitig mit Ω m-Räume ($X^{(0)}$ kann durch seinen maßgleichen F_σ-Kern ersetzt werden, es ist also auch Borelsch, d. h. m-Raum). Im neuen Sinne gilt also Satz 2 ohne weiteres.

2. Im Zusammenhange mit dem Problemkreise des Ergodensatzes sind noch zwei Abhandlungen von Herrn T. Carleman zu nennen, die nach Abfassung der w. o. zitierten Arbeiten des Verf. erschienen sind:

I. Application de la théorie des Équations intégrales linéaires aux équations différentielles de la dynamique, Arkiv för Mat., Astr. och Fys., 22 B (1932), No. 7, S. 1–5, eingegangen am 27. Mai 1931, erschienen am 2. März 1932;

II. Application ··· aux systèmes d'équations différentielles non linéaires, Acta Math., 59 (1932), S. 63–87, eingegangen am 10. Februar 1932, erscheint demnächst.

Carleman gelangt in diesen Abhandlungen unabhängig zu Koopmans Operatorenansatz und ~~zum~~ Beweise des Ergodensatzes[12] unter Beschränkung

[9] Vgl. Hausdorff, S. 106–107.

[10] Aus Def. 2, a. a. O., Anm. [5].

[11] Vgl. Hausdorff, S. 121 und 208.

[12] Vgl. die Arbeit des Verf., Proc. Nat. Ac., Bd. 18, Jan. 1932, S. 70; sowie Teil II, § 2 der in Anm. [1] zitierten.

— del.

zu einem, mit demjenigen des Verf. verwandten

auf differentiierbare Strömungen. Da für diese der zur Schar U_t gehörige Operator R (vgl. zur Bezeichnung die Arbeit des Verf. a. a. O. Anm.[1], S. 592, und die zweitvorhergehende, S. 571) direkt angebbar und seine Hypermaximalität leicht beweisbar ist, kann der Stonesche Satz vermieden und unmittelbar die Theorie des Spektrums von R benutzt werden. Diesen Weg schlägt Carleman ein.

, sowie a.a.O. Anm. 12, S. 71

Indessen ist sein Beweisverfahren in I. wesentlich lückenhaft, denn seine Betrachtungen beruhen auf der dortigen Formel (4), welche bei den meisten Strömungen unrichtig ist. In der Tat zeigt der Vergleich von (4) mit der vom Verf. benutzten Form Spektraltheorie, daß das dort auftretende $\theta(p_0, q_0 \mid \lambda)$ der Integralkern des Operators $1 - E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(\lambda > 0)$ bzw. $-E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(\lambda < 0)$ sein muß. Bereits auf der Energiefläche des harmonischen linearen Oscillators besitzen aber die genannten Operatoren überhaupt keinen Integralkern. (In Carlemans Ausdrucksweise ist dann $n = 1$, $0 \leq x_1 \leq 1$, $x_1 = 0$ mit $x_1 = 1$ zu identifizieren, $A_1 = 1$ — d. h. $\Omega(U) = i\frac{dU}{dx_1}$, falls die Einheiten geeignet gewählt werden. Es liegt also ein reines Punktspektrum bei $\frac{1}{\lambda} = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ vor, zu 0 gehört die Eigenfunktion 1. Somit wäre $\theta\left(p_0, q_0 \middle| \frac{1}{\pi}\right) - \theta\left(p_0, q_0 \middle| -\frac{1}{\pi}\right) + 1$ der Integralkern von $(1 - E(\pi)) - (-E(-\pi)) + P_{[1]} = 1 + P_{[1]} - (E(\pi) - E(-\pi)) = 1$, aber der Einheitsoperator 1 hat keinen Integralkern. Hierbei haben wir die Normierung $\theta(p_0, q_0 \mid 0) = 0$ wesentlich benutzt, aber andere Beispiele setzen auch diese nicht voraus.)

In II. wird dieser Fehler durch einen besonderen Kunstgriff (Einführung der Hilfsvariablen ξ, η an Stelle von p_0, q_0) vermieden. Die Rolle der Formel (4) von I. übernimmt die richtige Formel (19) von II., und der Beweis wird lückenlos.

(43) ~~26~~ 16.

EINIGE SÄTZE ÜBER MESSBARE ABBILDUNGEN

II. II, 16

Von J. v. Neumann, Princeton

1. Den Gegenstand dieser Arbeit bilden einige Sätze über meßbare Funktionen, die teilweise wegen ihrer Anwendung in unmittelbar nachfolgenden Artikel des Verfassers abgeleitet wurden. Immerhin sind sie vielleicht auch von selbständigem mathematischem Interesse.

Wir werden im folgenden gewisse Mengen Ω betrachten, die kurz *m*-Räume genannt werden sollen, die wir so definieren:

Definition 1. *Eine Menge Ω heißt ein m-Raum, wenn sie metrisch, separabel und vollständig ist*[2] *(die Distanz zweier Punkte x, y heißt Entfernung x, y).*

Beispiele von *m*-Räumen sind zahlreich: Der *k*-dimensionale Euklidische Raum in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$, $\{\eta_1, \cdots, \eta_k\}$ (die ξ, η sind reelle Zahlen) durch $\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_k-\eta_k)^2}$ definiert wird, oder auch durch $\mathrm{Max}\,(|\xi_1-\eta_1|, \cdots, |\xi_k-\eta_k|)$; der Hilbertsche Raum (Punkte: $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots$ endlich), in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ durch $\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots}$ definiert wird; der ∞-dimensionale Raum[3] (Punkte: alle $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$), in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ durch

$$\underset{n=1,2,\cdots}{\mathrm{Min}}\left\{\mathrm{Max}\left[|\xi_1-\eta_1|, \cdots, |\xi_n-\eta_n|, \frac{1}{n}\right]\right\}$$

definiert wird[4]; jede abgeschlossene Teilmenge eines *m*-Raumes[5]; usw.

Der zweite Begriff, den wir einführen, ist ein genaues Analogon des Lebesgueschen äußeren Maßes, definiert in einem *m*-Raume. Wir nennen es ein *l*-Maß[6].

Definition 2. *Im m-Raume Ω sei ein l-Maß definiert, wenn jeder Teilmenge N von Ω eine Zahl $\mu^*(N)$ zugeordnet ist, mit den folgenden Eigenschaften:*

---

[1] Received March 10, 1929.

[2] Vgl. z. B. Hausdorff, „Mengenlehre" (Berlin und Leipzig 1927), S. 94–95 und 102.

[3] Im ∞-dimensionalen Bereiche, wie man sieht, mehrere, voneinander wesentlich verschiedene, Analoga des Euklidischen Raumes!

[4] Diese Entfernungsdefinition hat die Wirkung, daß die Folge $\{\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \cdots\}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ dann und nur dann für $j \to \infty$ gegen $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ konvergiert, wenn für jedes n $\xi_n^{(j)} \to \xi_n$ $(j \to \infty)$ gilt.

[5] Mit derselben Metrik.

[6] Die nachfolgenden Begriffsbildungen lehnen sich an die von Carathéodory in seiner Theorie der meßbaren Mengen [illegible] an (vgl. Vorbemerkungen in I und VI). Vgl. Carathéodory „Reelle Funktionen" (Berlin und Leipzig 1918), S. 237–274.

EINIGE SÄTZE ÜBER MESSBARE ABBILDUNGEN[1].

Von J. v. Neumann, Princeton.

1. Den Gegenstand dieser Arbeit bilden einige Sätze über meßbare Funktionen, die teilweise wegen ihrer Anwendung im unmittelbar nachfolgenden Artikel des Verfassers abgeleitet wurden. Immerhin sind sie vielleicht auch von selbständigem mathematischen Interesse.

Wir werden im folgenden gewisse Mengen Ω betrachten, die kurz m-Räume genannt werden sollen; sie sind so definiert:

Definition 1. *Die Menge Ω heißt ein m-Raum, wenn sie metrisch, separabel und vollständig ist[2] (ihre Elemente sollen $x, y, \cdots$ heißen, die Entfernung $\overline{x, y}$).*

Beispiele von m-Räumen sind zahlreich: Der k-dimensionale Euklidische Raum, in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$, $\{\eta_1, \cdots, \eta_k\}$ (die ξ, η sind reelle Zahlen!) durch $\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_k-\eta_k)^2}$ definiert wird, oder auch durch $\operatorname{Max}[|\xi_1-\eta_1|, \cdots, |\xi_k-\eta_k|]$; der Hilbertsche Raum (Punkte: $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots$ endlich), in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ durch $\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots}$ definiert wird; der ∞-dimensionale Raum[3] (Punkte: alle $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$), in dem die Distanz zweier Punkte $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, $\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ durch $\operatorname*{Min}_{n=1,2,\cdots}\left\{\operatorname{Max}\left[|\xi_1-\eta_1|, \cdots, |\xi_n-\eta_n|, \frac{1}{n}\right]\right\}$ definiert wird[4]; jede abgeschlossene Teilmenge eines m-Raumes[5]; usw.

Der zweite Begriff, den wir einführen, ist derjenige eines dem Lebesgueschen äußeren Maß analogen Maßes, definiert in einem m-Raume. Wir nennen es l-Maß[6]:

Definition 2. *Im m-Raume Ω ist ein l-Maß definiert, wenn jeder Teilmenge N von Ω eine Zahl $\mu^*(N)$ zugeordnet ist, mit den folgenden Eigenschaften:*

[1] Received March 16, 1932.

[2] Vgl. z. B. Hausdorff „Mengenlehre" (Berlin und Leipzig, 1927), S. 94, 125 und 103.

[3] Im ∞-dimensionalen bestehen, wie man sieht, mehrere, voneinander wesentlich verschiedene, Analoga des Euklidischen Raumes!

$\xi_n^{(p)}$

[4] Diese Entfernungsdefinition hat die Wirkung, daß die Folge $\{\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \cdots\}$ $(p=1, 2, \cdots)$ dann und nur dann für $p\to\infty$ gegen $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ konvergiert, wenn für jedes n $\xi_n^{(p)} \to \xi_n$ $(p\to\infty)$ gilt.

[5] Mit derselben Metrik!

[6] Die nachfolgenden Begriffsbildungen lehnen an jene von Carathéodorys Theorie der regulären Maßfunktionen an, jedoch mit einigen Zusatzbedingungen (d. s. Verschärfungen in I. und V.). Vgl. Carathéodory „Reelle Funktionen" (Berlin und Leipzig 1918), S. 237—274.

I. *$\mu^*(N)$ ist 0, oder positiv-endlich, oder $+\infty$. Für jede Kugel ist es endlich. (Eine Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius $\varrho > 0$ ist die Menge der x mit $\overline{x_0, x} \leq \varrho$.)*

II. *Aus $M \subset N$[7] folgt $\mu^*(M) \leq \mu^*(N)$.*

III. *Seien $N_1, N_2, \cdots$ endlich oder abzählbar viele Mengen, M ihre Vereinigungsmenge. Dann ist: $\mu^*(M) \leq \mu^*(N_1)+\mu^*(N_2)+\cdots$.*

IV. *Ist die Entfernung der Mengen M, N[8] >0, so ist $\mu^*(M+N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$.*

V. *$\mu^*(M)$ ist die untere Grenze aller $\mu^*(O)$, wenn O sämtliche offenen Mengen $\supset M$ durchläuft[9].*

Wir können nun, in beinahe wörtlicher Wiederholung von Carathéodorys Begriffsbildungen und Beweisen (a. a. O. Anmerkung [6]) zunächst definieren:

Definition 3. *Die Teilmenge M von Ω heißt meßbar, wenn für jede Teilmenge N von Ω*

$$\mu^*(N) = \mu^*(MN) + \mu^*(N - MN)^{10}$$

gilt. Statt $\mu^*(M)$ schreiben wir dann $\mu(M)$ und beweisen dann:

a) *jedes offene M ist meßbar.*

b) *Sind $M_1, M_2, \cdots$ endlich oder abzählbar viele meßbare Mengen, so ist $M_1+M_2+\cdots$ und $M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots$ meßbar. Ferner ist mit M, N auch $M-N$ meßbar.*

~~(Also sind alle Borelschen M meßbar.)~~ del.

c) *Alle M mit $\mu^*(M) = 0$ sind meßbar.*

[7] D. h.: M ist Teilmenge von N.

[8] D. h. die untere Grenze aller $\overline{x, y}$, x in M, y in N.

[9] II. folgt aus V., wir wollen aber die Carathéodorysche Anordnung nicht ändern. — Übrigens könnten wir in V. an Stelle der offenen Mengen $\supset M$ ebensogut alle Borelschen Mengen $\supset M$ treten lassen. Da jede offene Menge Borelsch ist, ist bloß zu zeigen: wenn P Borelsch ist, so existiert ein offenes $O \supset P$ mit $\mu^*(O) < \mu^*(P) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Bilden wir hierzu die Borelschen Klassen $F^{(\xi)}$ nach Hausdorff, S. 178, aber so, daß $F^{(0)}$ aus den offenen Mengen besteht. Ein Borelsches O obiger Art existiert: etwa $O = P$, wählen wir es aus $F^{(\xi)}$ mit kleinstmöglicher Ordnungszahl ξ. Wäre ξ gerade, $\neq 0$, so wäre $O = O_1 \cdot O_2 \cdot \cdots$, O_n aus $F^{(\xi_n)}$, $\xi_n < \xi$, und nach e) im Text $\lim_{n\to\infty} \mu^*(O_n) = \mu^*(O)$, also ein $\mu^*(O_n) < \mu(P) + \varepsilon$, entgegen der Annahme. Wäre ξ ungerade, also $= \eta+1$, so ist $O = O_1 + O_2 + \cdots$, O_n in $F^{(\eta)}$. Da bei unserer Definition $F^{(1)} = F^{(0)}$ ist, ist $\eta \neq 0$, also $O_n = O_{n1} \cdot O_{n2} \cdot \cdots$, O_{nm} aus $F^{(\eta_{nm})}$, $\eta_{nm} < \eta$. Also ist $\lim_{n\to\infty} \mu^*(O_{nm}) = \mu^*(O_n)$, und wenn wir $m = m_n$ mit $\mu^*(O_{nm}) < \mu^*(O_n) + \frac{\delta}{2^n}$ $(\delta > 0)$ wählen, für $O' = O_{1m_1} + O_{2m_2} + \cdots$ $\mu^*(O') < \mu^*(O) + \delta = \mu^*(P) + \varepsilon$, wenn wir $\delta = \mu^*(P) + \varepsilon - \mu^*(O)$ wählen. Dabei gehört O' zu $F^{(\eta)}$, entgegen der Annahme. Also muß $\xi = 0$ sein, d. h. O offen.

[10] $M+N$, MN oder $M \cdot N$, $M-N$ bezeichnen die Vereinigungs-, Durchschnitts-, Differenzmenge. Ebenso für mehrere Addenden bzw. Faktoren.

Ferner die bekannten Additivitäts- und Limeseigenschaften des Lebesgueschen Maßes:

d) *Sind* M_1, M_2, $\cdots$ *wie in* b) *und paarweise elementfremd, so ist* $\mu(M_1 + M_2 + \cdots) = \mu(M_1) + \mu(M_2) + \cdots$.

e) *Sind* M_1, M_2, $\cdots$ *wie in* b) *und* $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ *oder* $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ *und* N *ihr Limes* (*d. i.* $M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots$ *bzw.* $M_1 + M_2 + \cdots$), *so ist* $\mu(N) = \lim_{n \to \infty} \mu(M_n)$.

Aus a), b) folgt insbesondere, daß alle Borelschen Mengen meßbar sind.

Beispiele von l-Maßen sind leicht anzugeben: das gewöhnliche Lebesguesche äußere Maß im k-dimensionalen Euklidischen Raume; wenn $f(x_1, \cdots, x_k)$ eine in diesem Raume definierte, im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne meßbare Funktion ist, mit Werten > 0, die Größe $\mu^*(N) = \int \cdots \int_{\{x_1, \cdots, x_k\} \text{ in } N} f(x_1, \cdots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k$[11]; usw. Der allereinfachste Fall besteht, wenn Ω ein Intervall $0 \leq x < a$ ist (a positiv-endlich oder ∞), und μ^* das Lebesguesche äußere Maß ist.

Ist ein m-Raum Ω mit einem l-Maß gegeben, so betrachten wir seine meßbaren Teilmengen. Zwei solche, M, N, nennen wir äquivalent, in Zeichen $M \sim N$, wenn sie sich nur um eine Menge vom Maße 0 unterscheiden, d. h. wenn $\mu^*((M + N) - M \cdot N) = 0$ ist. Da offenbar $M \sim M$ gilt, aus $M \sim N$ $N \sim M$ folgt, und aus $M \sim N$, $N \sim A$ $M \sim A$ folgt, hat dieser Begriff die wesentlichen Eigenschaften eines Äquivalenzbegriffes. Wir definieren nun:

Definition 4. *Seien* Ω, Ω' *zwei m-Räume mit den bzw. l-Maßen* μ^*, μ'^*. *Eine maßtreue Punktabbildung von* Ω *auf* Ω' *ist eine eineindeutige Abbildung* $x' = \varphi(x)$ *von* Ω *auf* Ω', *die jeder meßbaren Teilmenge* M *von* Ω *ein meßbares Bild* M' *in* Ω' *vom gleichen Maße zuordnet, und jeder meßbaren Teilmenge* M' *von* Ω' *ein meßbares Urbild* M *in* Ω *vom gleichen Maße.*

Definition 5. *Seien* Ω, Ω', μ^*, μ'^* *wie vorhin. Eine maßtreue Mengenabbildung von* Ω *auf* Ω' *ist eine solche, die jeder meßbaren Teilmenge von* Ω *eine meßbare Teilmenge von* Ω' *vom gleichen Maße zuordnet, und zwar mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Zu jedem meßbaren* M' *in* Ω' *existiert ein meßbares* M *in* Ω, *dem eine* M' *äquivalente Menge zugeordnet ist.*
2. *Sind* M_1, M_2, $\cdots$ (*in* Ω) *die bzw. Mengen* M_1', M_2', $\cdots$ (*in* Ω') *zugeordnet, so sind* $M_1 + M_2 + \cdots$, $M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots$ *bzw.* $M_1' + M_2' + \cdots$, $M_1' \cdot M_2' \cdot \cdots$ *zugeordnet. Sind* M, N (*in* Ω) *bzw.* M', N' (*in* Ω') *zugeordnet, so ist* $M - N$ $M' - N'$ *zugeordnet*[12].

[11] Falls N nach Lebesgue nicht meßbar ist, bedeute $\int \cdots \int_{\{x_1, \cdots, x_k\} \text{ in } N}$ das „obere" Lebesguesche Integral. $f(x_1, \cdots, x_k) \equiv 1$ führt zum gewöhnlichen Lebesgueschen Maß zurück.

[12] Von diesen drei Forderungen genügen zwei, da aus ihnen die dritte folgt.

Zwei maßtreue Mengenabbildungen (von Ω *auf* Ω'*) heißen äquivalent, wenn für jedes meßbare* M *in* Ω *die durch die beiden Mengenabbildungen ihm zugeordneten Mengen in* Ω' *einander äquivalent sind.*

Eine maßtreue Punktabbildung $x' = \varphi(x)$ erzeugt offenbar eine maßtreue Mengenabbildung: indem wir jedem meßbaren M in Ω sein durch $x' = \varphi(x)$ vermitteltes Bild M' in Ω' zuordnen[13]. Wir werden aber auch die Umkehrung hiervon beweisen: (Satz 1) zu jeder maßtreuen Mengenabbildung kann eine maßtreue Punktabbildung gefunden werden, die eine ihr äquivalente maßtreue Mengenabbildung erzeugt.

Diese, und noch einige weitere Sätze bilden den Inhalt dieser Arbeit.

2. Seien Ω, Ω' m-Räume mit den bzw. l-Maßen μ^*, μ'^*, und sei eine maßtreue Mengenabbildung von Ω auf Ω' (im Sinne von Def. 5) gegeben. Ehe wir den angekündigten Satz 1 beweisen, leiten wir den folgenden Hilfssatz ab:

Hilfssatz. Sei M eine meßbare Menge in Ω, und es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann kann M in paarweise elementfremde Mengen Γ_1, Γ_2, $\cdots$, N zerlegt werden, $M = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + N$ [derart, daß $\mu(N) = 0$ ist, und jedes Γ_n abgeschlossen ist, ~~nicht leer~~, und einen Diameter $\leq \varepsilon$ hat[14].

$\mu(\Gamma_n) > 0$

[(die Anzahl der Addenden Γ_n darf auch endlich, oder sogar 0, sein),

Die Bedingung über den Diameter ist offenbar gegenstandslos, wenn M selbst einen Diameter $\leq \varepsilon$ hat. Ist ferner $M = M_1 + M_2 + \cdots$, wo M_1, M_2, $\cdots$ paarweise elementfremde meßbare Mengen sind, für die der Hilfssatz gesichert ist, so steht er auch für M fest: denn

$$M_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \cdots + N_1, \qquad M_2 = \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \cdots + N_2, \cdots$$

ergibt für M die Zerlegung

$$M = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + N,$$

wo Γ_1, Γ_2, $\cdots$ die Γ_{11}, Γ_{12}, $\cdots$, Γ_{21}, Γ_{22}, $\cdots$, $\cdots$ in irgendeiner Reihenfolge sind, und $N = N_1 + N_2 + \cdots$. Es genügt also, den Hilfssatz ohne die Diameterbedingung zu beweisen, wenn jedes meßbare $M = M_1 + M_2 + \cdots$, mit paarweise elementfremden, meßbaren M_1, M_2, $\cdots$, mit Diametern $\leq \varepsilon$ ist. Nun ist Ω separabel, sei x_1, x_2, $\cdots$ eine überall dichte Folge, K_1, K_2, $\cdots$ die Kugeln vom Radius ε um diese bez. Mittelpunkte. Dann ist

$$\Omega = K_1 + K_2 + \cdots,$$

so daß

$$M_1 = K_1 \cdot M, \qquad M_2 = (K_2 - K_1 \cdot K_2) \cdot M,$$
$$M_3 = (K_3 - (K_1 + K_2) \cdot K_3) \cdot M, \cdots$$

das Gewünschte leisten.

[13] 1. gilt sogar in verschärfter Form: jedes meßbare M' in Ω' ist selbst einem meßbaren M in Ω (seinem durch $x' = \varphi(x)$ vermittelten Urbild) zugeordnet.

[14] Der Diameter einer Menge Γ ist die obere Grenze aller Zahlen $\overline{x, y}$, x in Γ, y in Γ.

– wenn

del.

noch diejenigen

∓, die dass Maass 0 haben, L, und zu N hinzufügen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir können also die Diameterbedingung fortlassen, und M in einer Kugel K gelegen annehmen. K ist abgeschlossen, also meßbar, also $K-M$ auch. Sei $\delta > 0$, nach Def. 2, V existiert ein offenes $O \supset K-M$, mit $\mu(O) \leqq \mu(K-M)+\delta$. Also ist erst recht

$$\mu(O \cdot K) \leqq \mu(K-M)+\delta,$$

und

$$\mu(K-O \cdot K) = \mu(K)-\mu(O \cdot K) \geqq \mu(K)-\mu(K-M)-\delta = \mu(M)-\delta.$$

Dabei ist $\Gamma = K - O \cdot K$ abgeschlossen (K ist abgeschlossen, O offen) und $\subset M$.

Bilden wir nun das Γ für M und $\delta = \frac{1}{1}$, es heiße Γ_1, dann das Γ für $M - \Gamma_1$ und $\delta = \frac{1}{2}$, es heiße Γ_2, dann das Γ für $M-\Gamma_1-\Gamma_2$ und $\delta = \frac{1}{3}$, es heiße $\Gamma_3, \cdots$. Nach Konstruktion ist

$$\mu(M-\Gamma_1-\cdots-\Gamma_n) \leqq \frac{1}{n+1},$$

also auch

$$\mu(M-\Gamma_1-\Gamma_2-\cdots) \leqq \frac{1}{n+1}, \quad \text{d. h.} = 0.$$

Diese $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ und $N = M-\Gamma_1-\Gamma_2-\cdots$ leisten daher alles Gewünschte, ~~da~~ wir ~~die leeren~~ unter ihnen ∓ falls solche überhaupt vorliegen, fortlassen ~~können, womit der Hilfssatz bewiesen ist.~~

Nunmehr gehen wir so vor: Wir zerlegen Ω nach dem Hilfssatz in $\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+N$ mit $\varepsilon = \frac{1}{1}$. Die Mengenabbildung ordne $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, N$ die Mengen $\Gamma_1', \Gamma_2', \cdots, N'$ in Ω' zu. Je zwei der ersteren Mengen haben leere Durchschnitte, also haben je zwei der letzteren Durchschnitte vom Maße 0. Daher sind $\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3', \cdots$ bzw. den Mengen

$$\bar{\Gamma}_1' = \Gamma_1', \qquad \bar{\Gamma}_2' = \Gamma_2' - \Gamma_1' \cdot \Gamma_2', \qquad \bar{\Gamma}_3' = \Gamma_3' - (\Gamma_1' + \Gamma_2') \cdot \Gamma_3', \cdots$$

äquivalent. Also: $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ sind paarweise elementfremd und $\subset \Omega$, ebenso $\bar{\Gamma}_1', \bar{\Gamma}_2', \cdots$ und $\subset \Omega'$; $\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots$ ist $\subset \Omega$ und ihm äquivalent, $\bar{\Gamma}_1'+\bar{\Gamma}_2'+\cdots$ ist $\subset \Omega'$ und ihm äquivalent; die Γ_n zugeordnete Menge ist $\bar{\Gamma}_n'$ äquivalent; Γ_n ist abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und sein Diameter $\leqq \frac{1}{1}$.

Jetzt zerlegen wir jedes $\bar{\Gamma}_n'$ nach dem Hilfssatz in $\Gamma_{n1}'+\Gamma_{n2}'+\cdots+N_n'$ mit $\varepsilon = \frac{1}{1}$. Die Mengenabbildung ordne $\Gamma_{n1}', \Gamma_{n2}', \cdots, N_n'$ die Mengen $\Gamma_{n1}, \Gamma_{n2}, \cdots, N_n$ in Ω zu. Da je zwei der ersteren Mengen leere Durchschnitte haben und $\subset \bar{\Gamma}_n'$ sind, also $\subset$ in einer Menge $\sim \Gamma_n'$, können wir die letzteren wiederum durch äquivalente Mengen ersetzen, die auch paarweise elementfremd und $\subset \Gamma_n$ sind. So werde aus $\Gamma_{n1}, \Gamma_{n2}, \cdots$ bzw. $\bar{\Gamma}_{n1}, \bar{\Gamma}_{n2}, \cdots$. Also: $\bar{\Gamma}_{n1}, \bar{\Gamma}_{n2}, \cdots$ sind paarweise elementfremd und $\subset \Gamma_n$, ebenso Γ_{n1}',

vom Maasse >0,

$\Gamma_{n2}', \cdots$ und $\subset \bar{\Gamma}_n'$; $\bar{\Gamma}_{n1}+\bar{\Gamma}_{n2}+\cdots$ ist $\subset \Gamma_n$ und ihm äquivalent, $\Gamma_{n1}'+\Gamma_{n2}'+\cdots$ ist $\subset \bar{\Gamma}_n'$ und ihm äquivalent; die $\bar{\Gamma}_{np}$ zugeordnete Menge ist Γ_{np}' äquivalent; Γ_{np}' ist abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und sein Diameter $\leqq \frac{1}{1}$.

5-mal!

vom Maass >0,

Die mit Ω, Ω' und $\frac{1}{1}$ vorgenommene Konstruktion wiederholen wir an $\bar{\Gamma}_{np}, \Gamma_{np}'$ und $\frac{1}{2}$. So entstehen Mengen $\Gamma_{npq}, \bar{\Gamma}_{npq}'$ und $\bar{\Gamma}_{npqr}, \Gamma_{npqr}'$ mit den folgenden Eigenschaften: $\Gamma_{np1}, \Gamma_{np2}, \cdots$ sind paarweise elementfremd und $\subset \bar{\Gamma}_{np}$, ebenso $\bar{\Gamma}_{np1}', \bar{\Gamma}_{np2}', \cdots$ und $\subset \Gamma_{np}'$; $\Gamma_{np1}+\Gamma_{np2}+\cdots$ ist $\subset \bar{\Gamma}_{np}$ und ihm äquivalent, $\bar{\Gamma}_{np1}', \bar{\Gamma}_{np2}', \cdots$ ist $\subset \Gamma_{np}'$ und ihm äquivalent; die Γ_{npq} zugeordnete Menge ist $\bar{\Gamma}_{npq}'$ äquivalent; Γ_{npq} ist abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und sein Diameter $\leqq \frac{1}{2}$. $\bar{\Gamma}_{npq1}, \bar{\Gamma}_{npq2}, \cdots$ sind paarweise elementfremd und $\subset \Gamma_{npq}$, ebenso $\Gamma_{npq1}', \Gamma_{npq2}', \cdots$ und $\subset \bar{\Gamma}_{npq}'$; $\bar{\Gamma}_{npq1}+\bar{\Gamma}_{npq2}+\cdots$ ist $\subset \Gamma_{npq}$ und ihm äquivalent, $\Gamma_{npq1}'+\Gamma_{npq2}'+\cdots$ ist $\subset \bar{\Gamma}_{npq}'$ und ihm äquivalent; die $\bar{\Gamma}_{npqr}$ zugeordnete Menge ist Γ_{npqr}' äquivalent; Γ_{npqr}' ist abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und sein Diameter $\leqq \frac{1}{2}$.

Dieselbe Konstruktion wiederholen wir an $\bar{\Gamma}_{npqr}, \Gamma_{npqr}'$ und $\frac{1}{3}$, und gewinnen dadurch Mengen $\Gamma_{npqrs}, \bar{\Gamma}_{npqrs}'$ und $\bar{\Gamma}_{npqrst}, \Gamma_{npqrst}'$ usw. Zusammenfassend entsteht ein System von Mengen $\Gamma_{np\cdots fg}, \bar{\Gamma}_{np\cdots fg}'$ und $\bar{\Gamma}_{np\cdots fgh}, \Gamma_{np\cdots fgh}'$ ($n, p, \cdots, f, g$ sei eine beliebige ungerade Anzahl von Indizes, etwa $2\nu-1$, deren jeder über $1, 2, \cdots$ oder ein Anfangsstück davon läuft, $n, p, \cdots, f, g, h$ entsprechend eine gerade Anzahl 2ν). Dabei gilt: $\Gamma_{np\cdots f1}, \Gamma_{np\cdots f2}, \cdots$ paarweise elementfremd und $\subset \bar{\Gamma}_{np\cdots f}$, ebenso $\bar{\Gamma}_{np\cdots f1}'$, $\bar{\Gamma}_{np\cdots f2}', \cdots$ und $\subset \Gamma_{np\cdots f}'$; $\Gamma_{np\cdots f1}+\Gamma_{np\cdots f2}+\cdots$ ist $\subset \bar{\Gamma}_{np\cdots f}$ und ist ihm äquivalent, $\bar{\Gamma}_{np\cdots f1}'+\bar{\Gamma}_{np\cdots f2}'+\cdots$ ist $\subset \Gamma_{np\cdots f}'$ und ist ihm äquivalent; die $\Gamma_{np\cdots fg}$ zugeordnete Menge ist $\bar{\Gamma}_{np\cdots fg}'$ äquivalent; $\Gamma_{np\cdots fg}$ ist abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und sein Diameter ist $\leqq \frac{1}{\nu}$. Analoges gilt für $\bar{\Gamma}_{np\cdots fgh}, \Gamma_{np\cdots fgh}'$, nur ist dort $\Gamma_{np\cdots fgh}'$ abgeschlossen, ~~nicht leer~~ und vom Diameter $\leqq \frac{1}{\nu}$. Für $\nu = 1$ tritt an Stelle von $\Gamma_{np\cdots f}, \bar{\Gamma}_{np\cdots f}'$ (das $2\nu-2=0$ Indizes hätte) Ω, Ω'.

Alle Mengen $\Gamma_{np\cdots f}-\Gamma_{np\cdots f1}-\Gamma_{np\cdots f2}-\cdots$, $\Gamma_{np\cdots f}'-\bar{\Gamma}_{np\cdots f1}'-\bar{\Gamma}_{np\cdots f2}'-\cdots$, $\Gamma_{np\cdots fg}-\bar{\Gamma}_{np\cdots fg1}-\bar{\Gamma}_{np\cdots fg2}-\cdots$, $\bar{\Gamma}_{np\cdots fg}'-\Gamma_{np\cdots fg1}'-\Gamma_{np\cdots fg2}'-\cdots$ haben das Maß 0, also auch ihre Vereinigungsmengen über alle ν und $n, p, \cdots, f, g, h$ (der ersten und dritten in Ω, der zweiten und vierten in Ω'): M_0, M_0'. Aus dem bisher Gesagten folgt, daß jeder Punkt von $\Omega - M_0$ genau einem Durchschnitt $\Gamma_n \cdot \bar{\Gamma}_{np} \cdot \Gamma_{npq} \cdot \bar{\Gamma}_{npqr} \cdots$ angehört, und jeder Punkt von $\Omega' - M_0'$ genau einem Durchschnitt $\bar{\Gamma}_n' \cdot \Gamma_{np}' \cdot \bar{\Gamma}_{npq}' \cdot \Gamma_{npqr}' \cdots$. Andererseits ist jeder Durchschnitt $\Gamma_n \cdot \bar{\Gamma}_{np} \cdot \Gamma_{npq} \cdot \bar{\Gamma}_{npqr} \cdots$ wegen $\Gamma_n \supset \bar{\Gamma}_{np} \supset \Gamma_{npq} \supset \bar{\Gamma}_{npqr} \supset \cdots$ gleich $\Gamma_n \cdot \Gamma_{npq} \cdots$. Da $\Gamma_n, \Gamma_{npq}, \cdots$ eine absteigende Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen ist, deren Diameter gegen 0 streben, besteht ihr Durchschnitt aus genau einem Punkt (vgl. a. a. O. Anm. [2]). Ebenso zeigt

del.

man, daß der Durchschnitt $\overline{\Gamma}'_n \cdot \Gamma'_{np} \cdot \overline{\Gamma}'_{npq} \cdot \Gamma'_{npqr} \cdots$ aus genau einem Punkte besteht (hier ist $\Gamma'_{np} \cdot \Gamma'_{npqr} \cdots$ heranzuziehen). Sei die Menge aller $\Gamma_n \cdot \overline{\Gamma}_{np} \cdot \Gamma_{npq} \cdot \overline{\Gamma}_{npqr} \cdots$-Durchschnittspunkte Ω_1, die aller $\overline{\Gamma}'_n \cdot \Gamma'_{np} \cdot \overline{\Gamma}'_{npq} \cdot \Gamma'_{npqr} \cdots$-Durchschnittspunkte Ω'_1. Da $\Omega_1 \supset \Omega - M_0$, $\Omega - \Omega_1 \subset M_0$ ist, ist $\Omega - \Omega_1$ vom Maße 0, d. h. Ω_1 dem Ω äquivalent, ebenso ist Ω'_1 dem Ω' äquivalent.

Auf diese Weise sind sowohl die Punkte von Ω_1, als auch diejenigen von Ω'_1, eineindeutig auf die Folgen $n, p, q, r, \cdots$ abgebildet; dies bewirkt auch eine eineindeutige Abbildung von Ω_1 auf Ω'_1, welche $x' = \varphi(x)$ heißen möge.

Aus der Definition dieser Abbildung folgt, daß sie $\Gamma_{np\cdots fg} \cdot \Omega_1$ in $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg} \cdot \Omega'_1$ überführt. Diese Mengen sind $\Gamma_{np\cdots fg}$ bzw. $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg}$ äquivalent, haben also bzw. dieselben Maße wie diese. $\Gamma_{np\cdots fg}$ hat dasselbe Maß, wie die ihr zugeordnete Menge, diese wieder dasselbe Maß, wie das ihr äquivalente $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg}$. Also haben $\Gamma_{np\cdots fg} \cdot \Omega_1$ und $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg} \cdot \Omega'_1$, ihr Bild, dasselbe Maß. Wenn Δ die Summe einiger Mengen $\Gamma_{np\cdots fg}$ ist (alle von gleicher Indizesanzahl $2\nu - 1$, also paarweise elementfremd), so ist demnach das $x' = \varphi(x)$-Bild von $\Delta \cdot \Omega_1$ meßbar und vom selben Maß wie diese Menge.

Sei M abgeschlossen (in Ω). $\Gamma^{(\nu)}$ sei die Summe aller $\Gamma_{np\cdots fg}$ mit $2\nu - 1$ Indizes, die Punkte aus M enthalten. Es ist $\Gamma^{(\nu)} \supset M$, und da jedes $\Gamma_{np\cdots fg}$ einen Diameter $\leqq \frac{1}{\nu}$ hat, hat jeder Punkt von $\Gamma^{(\nu)}$ eine Distanz $\leqq \frac{1}{\nu}$ von M. Daher ist $M = \Gamma^{(1)} \cdot \Gamma^{(2)} \cdots$, ferner $\Gamma^{(1)} \supset \Gamma^{(2)} \supset \cdots$; also auch

$$M \cdot \Omega_1 = (\Gamma^{(1)} \cdot \Omega_1) \cdot (\Gamma^{(2)} \cdot \Omega_1) \cdots, \qquad \Gamma^{(1)} \Omega_1 \supset \Gamma^{(2)} \Omega_1 \supset \cdots.$$

Da das Bild von $\Gamma^{(\nu)} \cdot \Omega_1$ meßbar und vom selben Maße ist, gilt dasselbe vom Bilde von $M \cdot \Omega_1$.

Wenn O offen ist, so ist ~~$\Omega - O = M$ abgeschlossen~~ und da das Bild ~~vom~~ * $\cdot \Omega_1$ meßbar und vom selben Maße ist, gilt dasselbe von $O \cdot \Omega_1$. Ist $N = O_1 \cdot O_2 \cdots$, wobei $O_1, O_2, \cdots$ offen und $O_1 \supset O_2 \supset \cdots$ sind, so gilt dasselbe wegen $N \cdot \Omega_1 = (O_1 \cdot \Omega_1) \cdot (O_2 \cdot \Omega_1) \cdots$, $O_1 \cdot \Omega_1 \supset O_2 \cdot \Omega_1 \supset \cdots$, auch für $N \cdot \Omega_1$. Schließlich ist $O_1 \supset O_2 \supset \cdots$ überflüssig, da wir $O_1, O_2, \cdots$ durch $O_1, O_1 \cdot O_2, \cdots$ ersetzen können.

Wenn A das Maß 0 hat, so gibt es ein $M = O_1 \cdot O_2 \cdots \supset A$ vom Maß 0 (wegen Def. 2, V). Das Bild von $A \cdot \Omega_1$ ist Teil des Bildes von $M \cdot \Omega_1$, da dieses das Maß 0 hat, hat jenes auch das Maß 0 und ist meßbar.

Die Aussage: das Bild von $M \cdot \Omega_1$ ist meßbar und hat dasselbe Maß wie M, gilt also 1. für jedes $M = O_1 \cdot O_2 \cdots$, $O_1, O_2, \cdots$ offen; 2. für jedes M vom Maße 0. Da jedes meßbare M gleich einem von der Art 1. minus einem von der Art 2. ist (wegen Def. 2, V, oder durch Anwendung des Hilfssatzes auf $\Omega - M$), gilt die obige Aussage für jedes meßbare M. Also wird jedes meßbare $M \subset \Omega_1$ durch $x' = \varphi(x)$ auf ein meßbares

$O = M_1 + M_2 + \cdots$, wobei $M_1, M_2, \cdots$ abgeschlossen und $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ sind; also $O \cdot \Omega_1 = M_1 \cdot \Omega_1 + M_2 \cdot \Omega_1 + \cdots$, $M_1 \cdot \Omega_1 \subset M_2 \cdot \Omega_1 \subset \cdots$,

*	M_n

—	von

$M' \subset \Omega'_1$ vom selben Maße abgebildet. Auf dieselbe Weise beweist man die Umkehrung. Nach Def. 1 bildet also $x' = \varphi(x)$ Ω_1 auf Ω'_1 maßtreu ab.

Für welche M ist das $x' = \varphi(x)$-Bild von $M \cdot \Omega_1$ der zugeordneten Menge (in Ω') äquivalent? Für $M = \Gamma_{np\cdots fg}$ ist das jedenfalls der Fall (das Bild ist $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg} \cdot \Omega'_1$, äquivalent $\overline{\Gamma}'_{np\cdots fg}$, also der Menge, die $\Gamma_{np\cdots fg}$ zugeordnet ist); also auch für die weiter oben erwähnten Δ; also bei abgeschlossenem M für die weiter oben erwähnten $\Gamma^{(\nu)}$, und für $M = \Gamma^{(1)} \cdot \Gamma^{(2)} \cdots$ selbst; also, auf Grund derselben Betrachtungen wie weiter oben nacheinander 1. für jedes offene O, 2. für jedes $M = O_1 \cdot O_2 \cdots$, $O_1, O_2, \cdots$ offen, 3. für jedes M vom Maße 0, 4. für jedes meßbare M. Somit ist die durch $x' = \varphi(x)$ erzeugte Mengenzuordnung der ursprünglich gegebenen äquivalent.

Ein Mangel besteht noch: nämlich daß $x' = \varphi(x)$ Ω_1 auf Ω'_1 abbildet, und nicht Ω auf Ω'. Dieser wird, falls Ω, Ω' unabzählbar sind, wie folgt behoben. Sei $M_1 \subset \Omega$ vom Maße 0 und von der Mächtigkeit des Kontinuums,[15] $M'_1 \subset \Omega'$ ebenso. $M'_1 \cdot \Omega'_1$ hat auch das Maß 0, also auch sein Urbild M_2, ebenso $M_1 \cdot \Omega_1$ und sein Bild M'_2. Somit sind $M_1 + M_2 \subset \Omega$ und $M'_1 + M'_2 \subset \Omega'$ vom Maße 0 und der Mächtigkeit des Kontinuums,[16] und $(M_1 + M_2) \cdot \Omega_1$ hat das Bild $(M'_1 + M'_2) \cdot \Omega'_1$. Wir setzen

$$\Omega_2 = \Omega_1 - (M_1 + M_2) \cdot \Omega_1, \qquad \Omega'_2 = \Omega_2 - (M'_1 + M'_2) \cdot \Omega_2,$$

dann ist Ω'_2 das Bild von Ω_2, und da $\Omega_1 - \Omega_2 \subset M_1 + M_2$ das Maß 0 hat, hat auch $\Omega - \Omega_2$ das Maß 0, und weil es $\supset M_1 + M_2$ ist, die Mächtigkeit des Kontinuums. Dasselbe gilt für $\Omega' - \Omega'_2$.

Schränken wir nun die Abbildung $x' = \varphi(x)$ auf Ω_2, Ω'_2 ein, verwenden wir dagegen in $\Omega - \Omega_2$, $\Omega' - \Omega'_2$ irgendeine eineindeutige Abbildung $x' = \psi(x)$ der ersteren Menge auf die letztere (beide haben ja dieselbe Mächtigkeit). Beide Abbildungen machen zusammen eine eineindeutige Abbildung $x' = \chi(x)$ von Ω auf Ω' aus. Da sich aber $x' = \chi(x)$ von $x' = \varphi(x)$ (in Ω wie in Ω') nur auf einer Menge vom Maße 0 unterscheidet, hat die erstere

[15] Eine solche Menge konstruiert man z. B. so: Nach Hausdorff, S. 138, Satz XI und S. 137, Satz X, hat das unabzählbare Ω ein „dyadisches Diskontinuum" $\mathfrak{A}$ zur Teilmenge. D. h. es ist jeder Folge $u_1, u_2, \cdots (= 0, 1)$ ein Element $x_{u_1 u_2 \ldots}$ von Ω zugeordnet, derart daß für jede gegebene Umgebung O von $x_{u_1 u_2 \ldots}$ ein ~~n~~ existiert, daß alle $x_{v_1 v_2 \ldots}$ mit $u_1 = v_1, \cdots, u_n = v_n$ zu O gehören; und $\mathfrak{A}$ die Menge aller $x_{u_1 u_2 \ldots}$ ist. Seien nun $u_1, u_3, \cdots$ fest gegeben, und ~~$\mathfrak{A}_{u_1 u_3 \ldots}$~~ die Menge aller $x_{u_1 u_2 \ldots}$ ($u_2, u_4, \cdots$ beliebig). Dabei ist $\mathfrak{A} \subset K$ für eine geeignete Kugel K. Die ~~$\mathfrak{A}_{u_1 u_3 \ldots}$~~ sind alle abgeschlossen, von der Mächtigkeit des Kontinuums, und $\subset K$. Je zwei solche Mengen sind elementfremd, also ist die Maßsumme irgendwelcher endlich vielen unter ihnen $\leqq \mu(K)$ (endlich!). Daher können höchstens abzählbar viele unter ihnen Maße > 0 haben. Aber ihre Anzahl ist Kontinuum, also gibt es unter ihnen auch solche vom Maße 0.

[16] Ω, Ω' haben selbst, als separable Mengen, höchstens die Mächtigkeit des Kontinuums.

\	D
—	n
\	D
\	D
~~$\mathfrak{A}_{u_1 u_3}$~~	$D_{u_1 u_3}$
~~$\mathfrak{A}_{u_1 u_3}$~~	$D_{u_1 u_3}$

Abbildung mit der letzteren dies gemein: sie ist maßtreu, und erzeugt eine Mengenzuordnung, welche der ursprünglich gegebenen äquivalent ist.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 1. *Seien Ω, Ω' m-Räume mit den bzw. l-Maßen μ^*, μ'^*. Jede maßtreue Punktabbildung von Ω auf Ω', oder auch nur von Ω_1 auf Ω'_1 mit $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega'_1 \subset \Omega'$, $\Omega - \Omega_1$ und $\Omega' - \Omega'_1$ vom Maße 0, erzeugt eine maßtreue Mengenabbildung von Ω auf Ω'. Umgekehrt ist jede maßtreue Mengenabbildung von Ω auf Ω' einer solchen äquivalent, die durch eine maßtreue Punktabbildung eines Ω_1 auf ein Ω'_1 (vgl. oben) erzeugt wird. Sind Ω, Ω' unabzählbar, so können wir sogar $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega'_1 = \Omega$ erreichen. (Vgl. hierzu Def. 4, 5 in § 1, und das daran anschließend Gesagte.)*

3. Seien Ω, Ω', μ^*, μ'^* wie bisher, $x' = \varphi(x)$ eine eineindeutige Abbildung von Ω auf Ω', von der bloß die eine Hälfte der in Def. 4 formulierten Eigenschaften verlangt werde: das Urbild eines jeden meßbaren M' in Ω' soll ein meßbares M in Ω vom selben Maße sein. Wir wollen zeigen, daß dennoch die ganze Def. 4 (d. h. auch die umgekehrte Eigenschaft) gilt, d. h. daß $x' = \varphi(x)$ maßtreu ist.

Sei $x'_1, x'_2, \cdots$ eine in Ω' überall dichte Folge, $K'_{\nu\lambda}$ $(\nu, \lambda = 1, 2, \cdots)$ die Kugel mit dem Mittelpunkt x'_ν und dem Radius $\frac{1}{\lambda}$. Das Urbild

vom Maasse 0

von $K'_{\nu\lambda}$ ist meßbar, also bis auf eine Menge $N_{\nu\lambda}$ eine Borelsche Menge (vgl. den Hilfssatz in § 2), diese heiße $A_{\nu\lambda}$. Die Summe aller $N_{\nu\lambda}$ ist auch vom Maße 0, sie ist Teil einer Borelschen Menge M_{00} vom Maße 0 (vgl. die analogen Schlüsse in § 2). In $\Omega - M_{00}$ gilt also: $\varphi(x)$ liegt dann und nur dann in $K'_{\nu\lambda}$, wenn x in $A_{\nu\lambda}$ liegt, d. h. soweit es in $A_{\nu\lambda} - M_{00} \cdot A_{\nu\lambda}$ liegt. Für die auf $\Omega - M_{00}$ eingeschränkte Funktion $\varphi(x)$, sie heiße $\varphi_1(x)$, gilt also: das Urbild von M' (in Ω', M' braucht nicht nur aus $\varphi_1(x)$-Punkten zu bestehen, sein Urbild sind jene x, deren $\varphi_1(x)$ in M' liegen, — übrigens soll im Folgenden der Begriff „Urbild" stets so verstanden werden) ist eine Borelsche Menge, falls M' ein $K'_{\nu\lambda}$ ist. Da jedes offene M' Summe einer Folge von $K'_{\nu\lambda}$'s ist, gilt dies auch für alle offenen M', und dann auch für deren Komplementären, die abgeschlossenen M'. Hieraus wieder schließt man, daß es für alle Borelschen M' gilt.

Sei Ω'' der in § 1 als drittes Beispiel eines m-Raumes erwähnte ∞-dimensionale Raum aller $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ (vgl. auch Anm. [4]). In dem wir jedem x' von Ω' das $\psi(x') = \{\overline{x'_1, x'}, \overline{x'_2, x'}, \cdots\}$ von Ω'' zuordnen, bilden wir Ω' eineindeutig und mitsamt seiner Umkehrung stetig auf eine Teilmenge Ω''_0 von Ω'' ab. In der Tat: Aus $\psi(x'^{(1)}) = \psi(x'^{(2)})$ folgt $\overline{x'_n, x'^{(1)}}$

2-mal!

del.

$= \overline{x'_n, x'^{(2)}}$, wenn wir also eine Folge $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \cdots$ wählen, die gegen $x'^{(1)}$ strebt, so ist $\overline{x'_{n_\nu}, x'^{(1)}} \to 0$, $\overline{x'_{n_\nu}, x'^{(2)}} \to 0$, d. h. $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \cdots$ strebt

auch gegen $x'^{(2)}$, $x'^{(1)} = x'^{(2)}$. Aus $x'^{(m)} \to x'$ folgt $\overline{x'_n, x'^{(m)}} \to \overline{x'_n, x}$ (für $m \to \infty$), also $\psi(x'^{(m)}) \to \psi(x')$ (vgl. Anm. [4]). Aus $\psi(x'^{(m)}) \to \psi(x')$, d. h $\overline{x'_n, x'^{(m)}} \to \overline{x'_n, x'}$ für jedes n folgt: sei $\delta > 0$, x'_n mit $\overline{x'_n, x'} \leqq \delta$ gewählt, dann ist für ein genügend großes m $\overline{x'_n, x'^{(m)}} \leqq 2\delta$, also $\overline{x', x'^{(m)}} \leqq \delta + 2\delta = 3\delta$ — somit gilt $x'^{(m)} \to x'$.

Als eineindeutiges stetiges Bild des m-Raumes Ω' ist Ω''_0 (absolut) Borelsch[17]. Sei $M'' \subset \Omega''$ (absolut) Borelsch, dann ist es auch $M'' \cdot \Omega''_0$, das ψ-Urbild von M'' ist das durch die Inverse von ψ vermittelte Bild von $M'' \cdot \Omega''_0$, also wieder (absolut) Borelsch[18]. Das $\psi(\varphi_1)$-Urbild von M'' ist somit das φ_1-Urbild einer Borelschen Menge in Ω', also, wie wir w. o. zeigten, selbst eine Borelsche Menge in Ω. Somit bildet $\psi(\varphi_1(x))$ $\Omega - M_{00}$ eineindeutig auf eine gewisse Teilmenge von Ω'' ab, und jede Borelsche Teilmenge von Ω'' hat als Urbild eine Borelsche Menge in Ω. Daher ist $\psi(\varphi_1(x))$ eine Bairesche Funktion[18]. Infolgedessen hat jedes Borelsche $M \subset \Omega - M_{00}$ ein $\psi(\varphi_1)$-Bild, das ebenfalls Borelsch ist[19], und das ψ-Urbild desselben ist, wie wir weiter oben zeigten, ebenfalls Borelsch. Aber dies ist das φ_1-Bild von M, das mit dessen φ-Bild zusammenfällt, diese sind mithin als Borelsch erwiesen.

Insbesondere ist das Bild des ganzen $\Omega - M_{00}$, es heiße $\Omega' - M'_{00}$, Borelsch, daher ist auch M'_{00} Borelsch und infolgedessen meßbar[20]. Sein Maß ist dasselbe wie dasjenige seines φ-Urbildes M_{00}, also 0. Das φ-Bild M' eines Borelschen M ist die Summe derer von $M - M_{00} \cdot M$ und von $M_{00} \cdot M$. Ersteres ist ein φ_1-Bild, also Borelsch, also meßbar; letzteres $\subset M'_{00}$, also ebenso wie M'_{00} vom Maße 0, also auch meßbar. Daher ist auch M' meßbar, sein Maß ist gleich demjenigen seines Urbildes M.

Ist M vom Maße 0, so ist es $\subset N$, wobei N Borelsch und vom Maße 0 ist (vgl. die entsprechenden Betrachtungen in § 2); das φ-Bild M' von M ist Teil des φ-Bildes N' von N, also wie jenes vom Maße 0, und daher meßbar. Ist schließlich M nur als meßbar vorausgesetzt, so ist es als Summe einer Borelschen Menge und einer vom Maße 0 darstellbar (vgl. den Hilfs-

[17] Vgl. Hausdorff, S. 208—209, insbesondere Satz II.

[18] Vgl. Hausdorff (a. a. O. Anm. [2]), S. 260, Satz V. Allerdings müßte $f(x) = \psi(\varphi_1(x))$ reelle Zahlen als Werte haben, obwohl es in Wahrheit ein $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, d. h. $\{\xi_1(x), \xi_2(x), \cdots\}$, ist. Indessen ist der genannte Satz auf jedes $\xi_n(x)$ direkt anwendbar, und überträgt sich von diesen auf $f(x)$ (vgl. Anm. [4]). Mit $\varphi_1(x)$ selbst wäre dieser Schluß nicht möglich gewesen, da es Werte aus Ω' annimmt, das in keiner Beziehung zu den reellen Zahlen steht. Vgl. hierzu a. a. O., S. 268 unten, 269 oben.

[19] Vgl. Hausdorff (a. a. O. Anm. [2]), S. 269, Satz XIII.

[20] Dies ist die Hauptschwierigkeit des Beweises: denn wohl mußte das Urbild N eines meßbaren N' meßbar sein, wir konnten aber aus der Meßbarkeit von N nicht direkt auf diejenige des Bildes N' schließen.

satz in § 2), sein φ-Bild M' ist die Summe der φ-Bilder jener Mengen, also auch meßbar. Das Maß von M' ist jenem seines Urbildes M gleich.

Damit ist die Maßtreue der Abbildung $x' = \varphi(x)$ bewiesen. Wären wir von der anderen Hälfte von Def. 4 ausgegangen, wonach das Bild jedes meßbaren M in Ω ein meßbares M' in Ω' vom selben Maße ist, so wäre dies für die Inverse von φ unsere frühere Prämisse gewesen. Daher hätte sich die Maßtreue dieser Inversen, also auch diejenige von φ ergeben. φ,
Wir haben also bewiesen:

Satz 2. *Seien Ω, Ω', μ^*, μ'^* wie bisher, $x' = \varphi(x)$ eine eineindeutige Abbildung von Ω auf Ω'. Von den zwei Bedingungen in Def. 4 (Schluß von $M \subset \Omega$ auf $M' \subset \Omega'$, Schluß von $M' \subset \Omega'$ auf $M \subset \Omega$) folgt jede aus der anderen; d. h. jede von ihnen ist auch allein für die Maßtreue von φ notwendig und hinreichend.*

4. Zum Schluß soll ein Satz aus einer früheren Abhandlung des Verfassers[21] verallgemeinert und verschärft werden. Dazu muß eine dortige Begriffsbildung (d. i. die Maßfunktion, vgl. a. a. O., S. 193 unten) verallgemeinert werden.

Definition 6. *Sei Ω ein m-Raum, μ^* ein l-Maß in ihm, u. zw. derart, daß $\mu(\Omega)$ (also jedes $\mu^*(M)$) endlich ist. Eine Funktion $f(x)$, die in Ω definiert ist und reelle Zahlen als Werte hat, heiße meßbar, wenn jedes Intervall $\xi \leqq a$ eine meßbare x-Menge zur $\xi = f(x)$-Urbildmenge hat*[22]. *Die ganze Theorie des Lebesgueschen Integrals kann offenbar, unter Zugrundelegung des Maßes μ^* (bzw. μ), auf diese meßbaren Funktionen f übertragen werden. Das so entstehende Integral bezeichnen wir mit $\int_{\Omega} f(x)\, d v_x$.*

Ist $f(x)$ meßbar, nie negativ, und beschränkt, so definieren wir für alle a, $0 \leqq a \leqq Max(f(x))$, eine Funktion $\varphi(a) = \mu$ (Menge der x mit $f(x) \leqq a$). $\varphi(a)$ ist monoton nichtfallend und nach rechts halbstetig. Ferner ist

$$0 \leqq \varphi(a) \leqq Max(\varphi(a)) = \mu(\Omega).$$

Da auch $\varphi(a)$ meßbar ist, und in seinem Definitionsbereiche, dem m-Raume, $0 \leqq a \leqq Max(f(x))$ das gewöhnliche Lebesguesche Maß als l-Maß angesehen werden kann, können wir auch seine Maßfunktion $\psi(b)$ bilden. $\psi(b)$ ist (vgl. w. o.) in $0 \leqq b \leqq \mu(\Omega)$ definiert, monoton nichtfallend und nach rechts halbstetig, und es ist stets $0 \leqq \psi(b) \leqq Max(f(x))$. Übrigens ist $\psi(b)$ die obere Grenze aller a mit $\varphi(a) \leqq b$, also in einem gewissen Sinne die

[21] Annals of Math., 3212 (1931), S. 194, Satz 1.

[22] Offenbar gilt dies dann auch für die Summe aller $\xi \leqq b - \frac{1}{n}$-Intervalle $(n = 1, 2, \cdots)$, d. i. $\xi < b$, und für die Differenzmenge $a < \xi < b$. Hieraus folgert man es mühelos nacheinander für alle offenen, abgeschlossenen, und Borelschen ξ-Mengen.

Inverse von $\varphi(a)$; dasselbe gilt, wenn $\varphi(a)$ und $\psi(b)$ vertauscht werden (vgl. a. a. O., S. 193 unten).

Der zu beweisende Satz aber lautet so:

Satz 3. *Seien Ω, μ^* wie in Def. 6; f, φ, ψ ebenfalls wie dort, d. h. $f(x)$ in Ω definiert und mit reellen Zahlen als Werten, nicht negativ und beschränkt, $\varphi(a)$ seine Maßfunktion, $\psi(b)$ diejenige von $\varphi(a)$.*

Sei $g(u)$ für reelle Zahlen definiert und mit solchen als Werten, aber sonst ganz beliebig[23]. *$g(f(x))$ ist dann und nur dann meßbar (vgl. Def. 6), wenn $g(\psi(b))$ es ist (dieses im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne), und es gilt dann*

$$\int_{\Omega} g(f(x))\, d v_x = \int_0^{\mu(\Omega)} g(\psi(b))\, d b$$

(d. h. wenn eine Seite Sinn hat, dann auch die andere, und sie sind einander gleich).

Dieser Satz ist in zwei Beziehungen allgemeiner, als der in Anm. [21] angeführte: Erstens braucht Ω nicht, wie dort, eine Zahlenmenge zu sein, und μ^* das gewöhnliche Lebesguesche äußere Maß[24]; zweitens waren dort alle Schlußweisen nur in einer Richtung (von $g(\psi(b))$ auf $g(f(x))$) begründet, während die in der anderen Richtung fehlten[25]. Wir gehen nun zu seinem Beweise über.

Es genügt offenbar, zu zeigen: wenn von den zwei Mengen $g(f(x)) \leqq c$ und $g(\psi(b)) \leqq c$ (c fest) die eine meßbar ist, so ist es auch die andere, und beide haben dasselbe Maß. Oder wenn Ξ die u-Menge $g(u) \leqq c$ ist: 5-mal!
wenn vom $u = f(x)$-Urbild und vom $u = \psi(b)$-Urbild von Ξ das eine meßbar ist, so ist es auch das andere, und beide haben dasselbe Maß. | u
Wir beweisen dies für alle Ξ.

Betrachten wir das Zahlenintervall $0 \leqq u \leqq \mathrm{Max}(f(x))$. Es ist ein m-Raum, Ω_0. Wir definieren in ihm zwei l-Maße: erstens μ_1^* durch $\mu_1^*(\Xi) = \mu^*$ des f-Urbildes von Ξ, zweitens μ_2^* durch $\mu_2^*(\Xi) =$ gewöhnliches Lebesguesches äußeres Maß des ψ-Urbildes von Ξ. Die zu beweisende Behauptung lautet dann: μ_1^* ist mit μ_2^* identisch, oder: $\varphi_0(x) = x$ ist eine maßtreue Abbildung des Ω_0 mit μ_1^* auf das Ω_0 mit μ_2^* (vgl. Def. 4). ä
Nach Satz 2 genügt es hierzu, zu zeigen, daß die zweite Bedingung von

[23] Es braucht z. B. keineswegs meßbar zu sein!

[24] Bei den Anwendungen zum Beweise des Ergodensatzes (vgl. den nächstfolgenden Artikel des Verfassers sowie den in Proc. Nat. Ac. 18, January 1931) ist gerade diese Allgemeinheit wesentlich. Am zweit-a. O. wurde dies mittels der maßtreuen Abbildbarkeit der auftretenden Mengen auf reelle Zahlenmengen umgangen. Nun kann zwar das Bestehen dieser Abbildbarkeit, nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn M. Stone an den Verfasser, allgemein bewiesen werden — es ist aber wohl von Interesse, auch einen allgemeinen direkten Beweis zu besitzen, besonders da er ebenso verläuft wie der Beweis des Spezialfalles. H.

[25] Dies reicht zwar für die Anwendungen aus, ist aber prinzipiell unbefriedigend.

Def. 4 erfüllt ist, welche im vorliegenden Falle dies besagt: wenn Ξ μ_2^*-meßbar ist, so ist es auch μ_1^*-meßbar, und die beiden Maße sind einander gleich. Für welche Ξ trifft dies nun wirklich zu?

Wenn Ξ das Intervall $p \leqq a$ ist (d. h. der in $0 \leqq p \leqq \operatorname{Max}(f(x))$ gelegene Teil desselben), so ist das f-Urbild die Menge $f(x) \leqq a$, also meßbar, und vom Maße $\varphi(a)$, daher ist Ξ μ_1^*-meßbar und $\mu_1^*(\Xi) = \varphi(a)$. Das ψ-Urbild dagegen ist die Menge $\psi(b) \leqq a$, d. h. $b <$ oder $\leqq \varphi(a)$ (natürlich $b \geqq 0$), also meßbar und vom Maße $\varphi(a)$, daher ist Ξ auch μ_2^*-meßbar, und $\mu_2^*(\Xi) = \varphi(a)$. Das Intervall $p \leqq a$ ist also ein solches Ξ. Also auch die Summe der Intervalle $p \leqq b - \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, d. i. $p < b$; also auch die Differenzmenge $a < p < b$ (vgl. Anm. [22]). Und hieraus folgt dasselbe nacheinander für alle offenen, abgeschlossenen und Borelschen p-Mengen (vgl. Anm. [22]). Ist $\mu_2^*(\Xi) = 0$, so ist, wie wir schon oft schlossen, $\Xi \subset H$, H Borelsch, $\mu_2(H) = 0$. Nach dem soeben Gesagten ist also auch $\mu_1(H) = 0$, also auch Ξ μ_1-meßbar und $\mu_1(\Xi) = 0$. Also: auch die Ξ mit $\mu_2^*(\Xi) = 0$ haben die obige Eigenschaft. Und da, wie wir schon oft schlossen, jedes μ_2^*-meßbare Ξ Summe eines Borelschen und eines mit dem μ_2^*-Maß 0 ist, haben es auch diese. D. h.: die genannte Eigenschaft liegt bei allen Ξ, die für sie überhaupt in Frage kommen, vor. Damit ist der Beweis durchgeführt.

7-mal

| u

Dieses n soll ein n bleiben!

DIE EINFÜHRUNG ANALYTISCHER PARAMETER IN TOPOLOGISCHEN GRUPPEN.*

Von J. v. Neumann.

Einleitung.

Bitte ein deutsches eg von $\mathfrak{M}$ lieber!

1. Hilbert formulierte 1900 die folgende Frage[1]: Sei $\mathfrak{G}$ eine durch n Parameter stetig beschriebene Gruppe von stetigen Transformationen einer m-parametrigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, ist es dann möglich, in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M}$ solche Parameter einzuführen, daß alle die die Transformationen beschreibenden Funktionen stetig differentiierbar, oder sogar analytisch[2], ausfallen? Anders ausgedrückt: ist auf solche $\mathfrak{G}$, bei geeigneter Parameterwahl, die Liesche Theorie anwendbar? (Vgl. a. a. O. Anm. [1], [2].)

Brouwer gab 1909/10 durch schwierige und scharfsinnige topologische Untersuchungen[3] alle $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$-Typen für $m = 1, 2$ an, wodurch die Hilbertsche Frage für $m = 1$ bejahend beantwortet und für $m = 2$ weitgehend gefördert wurde.

Ein weiter unten anzugebendes Gegenbeispiel lehrt, daß die Hilbertsche Frage bei (in $\mathfrak{M}$) intransitivem $\mathfrak{G}$ im allgemeinen zu verneinen ist. (Für $m = 1$ zeigt Brouwers Liste, daß nur transitive Gruppen existieren; unser Gegenbeispiel entspricht dem einfachsten der übrigen Fälle: $n = 1$, $m = 2$.) Wir werden daher im folgenden $\mathfrak{G}$ stets als (in $\mathfrak{M}$) transitiv voraussetzen.

Unter dieser Voraussetzung werden wir für alle geschlossenen (in der topologischen Terminologie: kompakten) $\mathfrak{G}$ zeigen, daß die Hilbertsche Frage zu bejahen ist. Für nichtkompakte $\mathfrak{G}$ liegen vorläufig keine ähnlicherweise abschließenden Resultate vor.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden durch die in Anm. [13] angeführte Arbeit von A. Haar angeregt, und sie sind auf die Resultate derselben aufgebaut. Der Verfasser möchte Herrn Haar an dieser Stelle seinen Dank ~~dafür~~ aussprechen, daß er ihm dieselben noch vor der Publikation zur Verfügung stellte.

del.

2. Ein wichtiger Spezialfall des Hilbertschen Problems ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}$. Denn wenn wir die Elemente von $\mathfrak{G}$ mit a, b, x, y bezeichnen und das

* Received July 26, 1932.

[1] Kongreßvortrag, gehalten am internationalen Mathematikerkongreß in Paris, 1900. Abgedruckt in den Gött. Nachr., 1900. Es handelt sich hier um das „Problem 5".

[2] F. Schur bewies, Math. Ann. **41** (1893), S. 509—538, daß für alle jenen G, die in M transitiv sind, und für die eine Parameterwahl möglich ist, bei der alle genannten Funktionen zweimal stetig differentiierbar sind, auch eine solche möglich ist, bei der sie alle analytisch sind.

[3] L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **67** (1909), S. 246—267, und **69** (1910), S. 181—203.

Bitte ein deutsches eg brauchen!

Kompositionsgesetz in $\mathfrak{G}$ mit $a \cdot b$, so bestimmt jedes feste Element a von $\mathfrak{G}$ eine Transformation von $\mathfrak{G}$: $x \to x \cdot a^{4}$. Die Frage lautet dann: Ist es möglich, in $\mathfrak{G}$ n derartige Parameter einzuführen, daß die das Kompositionsgesetz beschreibenden Funktionen alle stetig differentiierbar bzw. analytisch ausfallen? (Natürlich sind stets Parameter „im kleinen", d. h. in einer geeignet gewählten Umgebung der Einheit von $\mathfrak{G}$, bzw. eines beliebig gegebenen Punktes von M, gemeint.) Wir werden als erstes dieses Problem erledigen und dann das allgemeinere (beliebiges M) darauf zurückführen.

Es genügt natürlich zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ auf eine Gruppe $\mathfrak{K}$ mit der genannten Eigenschaft homöomorph[5] und isomorph[6] abgebildet werden kann.

Eine Menge $\mathfrak{K}$ von k-dimensionalen komplexen Matrizen von nichtverschwindender Determinante ($k = 1, 2, \cdots$), die die Einheitsmatrix E_k enthält, und mit den Matrizen A, B auch die Inverse A^{-1} und ihr Matrizenprodukt $A \cdot B$, ist eine Gruppe mit der Kompositionsregel $A \cdot B$. Sie kann topologisiert werden, indem wir die Matrizen A als Punkte des k^2-dimensionalen komplexen, d. h. des $2k^2$-dimensionalen reellen, euklidischen Raumes ansehen (vgl. a. a. O. Anm. [7]), S. 5—6). Wir nehmen ferner an, daß jeder Häufungspunkt (d. i. Häufungsmatrix) von $\mathfrak{K}$ mit nichtverschwindender Determinante auch zu $\mathfrak{K}$ gehört. Dann kann $\mathfrak{K}$ in einer geeigneten Umgebung der Einheit homöomorph auf h ($= 0, 1, \cdots, 2k^2$) reelle Parameter $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ (die in einer gewissen Umgebung von $0, \cdots, 0$ variieren) bezogen werden[7], ja die Matrixelemente der Matrizen von $\mathfrak{K}$ sind sogar analytische Funktionen von $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$. Infolgedessen ist das Kompositionsgesetz von $\mathfrak{K}$ (d. i. das Multiplikationgesetz der Matrizen, das in den Matrixelementen algebraisch ist) in den Parametern $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ analytisch. D. h. ein solches $\mathfrak{K}$ hat die von uns gewünschten Eigenschaften.

Ist nun $\mathfrak{G}$ geschlossen (d. h. kompakt), und besitzt es eine stetige Darstellung $a \to D(a)$ durch k-dimensionale Matrizen, die auch treu (d. h. eineindeutig) ist, so können wir so schließen: Die Menge $\mathfrak{K}$ aller $D(a)$ (a durchläuft $\mathfrak{G}$) ist wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{G}$ abgeschlossen, und auch die inverse Abbildung ist stetig, d. h. die Darstellung ist eine homöomorphe Abbildung. Daß sie isomorph ist, ist klar. Da unsere Behauptung nach obigem für $\mathfrak{K}$ gilt[8], gilt sie somit auch für $\mathfrak{G}$.

[4] Übt man zuerst $x \to x \cdot a$ aus und dann $x \to x \cdot b$, so wird $x \to x \cdot (a \cdot b)$. $\mathfrak{G}$ ist offenbar transitiv in sich selbst.

[5] D. h. ein-eindeutig und gleichzeitig mit der Umkehrung stetig.

[6] D. h. das Kompositionsgesetz von $\mathfrak{G}$ in dasjenige von $\mathfrak{K}$ überführend.

[7] Dies bewies der Verf., Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 3—42. Vgl. insbesondere Satz I auf S. 27.

[8] Eigentlich fehlt noch $Det\,(D(a)) \neq 0$. Wegen $D(a) \cdot D(a^{-1}) = D(1)$ steht dies fest, wenn $D(1)$ die Einheitsmatrix ist. Dies ist aber stets erreichbar (vgl. z. B. a. a. O. Anm. [7], in Anm. [12], S. 28).

Wir brauchen also nur die Existenz treuer stetiger Darstellungen für die geschlossenen $\mathfrak{G}$ nachzuweisen. Dieser, auch an und für sich nicht uninteressante, Satz wird daher der Hauptgegenstand unserer Betrachtungen sein.

Die genannte Darstellung $D(a)$ wird übrigens aus lauter unitären Matrizen bestehen. Daher können wir den letztgenannten Satz, unter Berücksichtigung des in Anm. [7] zitierten Satzes, auch so formulieren: Die einzigen (im kleinen) n-parametrigen $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ geschlossenen (d. h. kompakten) Gruppen sind die abgeschlossenen Gruppen unitärer Matrizen des k-dimensionalen (komplexen) euklidischen Raumes $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ sowie deren homöomorph-isomorphe Bilder.

3. Um den eigentümlichen, analytisch-gruppentheoretisch-topologischen Charakter der zu verwendenden Methode zu veranschaulichen, seien jene Resultate der neueren gruppentheoretischen und topologischen Literatur, auf der die zu führenden Beweise beruhen, hier zusammengestellt. Es sind die folgenden:

Vgl. S. 170

a) A. Haar bewies vor kurzem, daß in jeder topologischen Gruppe[9], welche separabel[10] und im kleinen kompakt[11] ist, ein rechtsinvariantes Lebesguesches äußeres Maß[12] definiert werden kann[13]. Infolgedessen kann nach bekanntem Vorgang auch eine rechtsinvariante Lebesguesche Integration $\int_{\mathfrak{G}} f(x)\, dv_x$ (dv_x symbolisiert das „Volumelement" für die Variable x) definiert werden[14]. Hierbei ist zu erwähnen, daß bereits F. Peter und H. Weyl, unter Vervollkommnung von Ansätzen von Hurwitz, eine solche Integration für solche n-parametrige Gruppen konstruierten, deren Kompositionsgesetz auf stetig differentiierbare Funktionen der Parameter führt[15]; das Wichtige an Haars Konstruktion ist aber gerade, daß sie ganz allgemein und rein mengentheoretisch, ohne jede

[9] D. h. eine Gruppe, in der ein Umgebungsbegriff definiert ist, derart, daß die Komposition $a \cdot b$ und die Inverse a^{-1} stetige Funktionen von a, b bzw. von a sind. Vgl. für die Grundbegriffe der Topologie etwa Hausdorff, „Mengenlehre", Berlin und Leipzig (1927), § 40, S. 226—230.

[10] Vgl. a. a. O. Anm. [9], S. 125, und (10) auf S. 229.

[11] D. h. jeder Punkt hat eine Umgebung, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist. Da die Abbildung $x \to x \cdot a$ homöomorph ist, genügt es (bei Gruppen), dies für die Einheit zu verlangen.

[12] Vgl. Carathéodory, „Reelle Funktionen", Berlin und Leipzig (1918), S. 237—274; oder (für beliebige topologische Räume) in der Arbeit des Verf., Ann. of Math., **33** (1932), S. 574—586, Def. 2, 4 auf S. 574, 576. „Rechtsinvarianz" besagt, daß die Abbildung $x \to x \cdot a$ maßtreu ist.

[13] A. Haar, Ann. of Math., **34** (1933), S. [redacted]

[14] Z. B. als Stieltjessches Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\,(\text{Maß}_x[f(x) \leqq \lambda])$.

[15] Math. Ann. **97** (1928), S. 737—755, insbesondere S. 737.

T 147-169, insbesondere § 3.

Beziehung zu einer Parameterdarstellung, direkt zu einem Maßbegriff führt. Unsere Überlegungen, die vom Haarschen Maß zu den analytischen Parametern führen, können also als eine Art Umkehrung der Peter-Weylschen angesehen werden, bei denen das Umgekehrte geleistet wird — wenn auch die Schwierigkeiten von anderer Art sind.

b) Bei geschlossenem (kompaktem) $\mathfrak{G}$ ist das Haarsche Maß von ganz $\mathfrak{G}$, wie man leicht einsieht, endlich, kann also $= 1$ normiert werden. Alsdann sind die Operatoren- und Eigenwertmethoden und -sätze anwendbar, die Peter und Weyl a. a. O. Anm. [15] verwenden, wodurch eine vollständige Theorie der (stetigen) Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch unitäre endlich vieldimensionale Matrizen entsteht.

c) Bis hierher wurde bloß benutzt, daß $\mathfrak{G}$ eine topologische Gruppe ist. Unter Benutzung der Tatsache, daß es (im kleinen) homöomorph auf n Parameter bezogen werden kann, wird durch topologische Betrachtungen gezeigt, daß unter den in b) genannten Darstellungen auch treue vorkommen müssen. Hierbei werden in erster Linie zwei „dimensionstheoretische" Sätze benutzt: Brouwers Satz von der Gebietsinvarianz und Lebesgues „Pflastersteinsatz" bzw. der damit zusammenhängende „Allgemeine Zerlegungssatz" der Dimensionstheorie von K. Menger und Urysohn[16].

d) Bei den topologischen Betrachtungen werden auch die in Anm. [7] zitierten Resultate des Verf. über die Parameterdarstellung von Gruppen unitärer Matrizen mehrfach wesentlich herangezogen.

Die Einteilung der Arbeit ist diese: In Teil I wird die Existenz der treuen stetigen Darstellung bewiesen, in Teil II dies auf das Hilbertsche Problem angewendet und das Gegenbeispiel für (in $\mathfrak{M}$) intransitive $\mathfrak{G}$ angegeben.

Vgl. S. 170

Vgl. S. 170

I. Einführung analytischer Parameter in n-parametrigen geschlossenen Gruppen $\mathfrak{G}$.

1. $\mathfrak{G}$ sei eine topologische Gruppe, d. h. eine, in der ein Umgebungsbegriff definiert ist, derart, daß $a \cdot b$ und a^{-1} in a, b bzw. a stetig sind (vgl. Anm. [9]). Wir nennen $\mathfrak{G}$ n-parametrig $(n = 1, 2, \cdots)$, wenn jedes a von $\mathfrak{G}$ eine Umgebung ~~$U(a)$~~ hat, die einer offenen Punktmenge $K(a)$ im n-dimensionalen (reellen) euklidischen Raume R_n (der Zahlen n-tupel $a_1, \cdots, a_n$) homöomorph ist. Nach Anm. [9] genügt es, mit Hinblick auf die homöomorphe Abbildung $x \to x \cdot a$, diese Forderung nur für $a = 1$ (d. i. die Gruppeneinheit) zu stellen.

$\mathfrak{U}(a)$

Bitte ein deutsches U!

[16] L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **70** (1913), S. 161—165; H. Lebesgue, Fund. Math. **2** (1921), S. 256—285, sowie E. Sperner, Hamb. Abh. **6** (1928), S. 265—272; K. Menger, „Dimensionstheorie", Berlin und Leipzig (1928), S. 251—266.

Aus demselben Grunde können wir alle $K(a)$ als einander gleich annehmen. Eine Translation von $K(a)$ im R_n erlaubt es, das Bild von a nach $0, \cdots, 0$ zu verlegen; eine eventuelle Verkleinerung von $\cancel{U(a)}$ und $K(a)$, $K(a)$ als Kugel mit dem Mittelpunkt $0, \cdots, 0$ anzunehmen; eine nachfolgende Ähnlichkeitstransformation in R_n, den Radius von $K(a)$ gleich 1 zu normieren. Also wird $K(a)$ gleich K_1: $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 < 1$. Wir bilden noch die (abgeschlossene) Kugel $\overline{K}_{\frac{1}{2}}$: $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \leq \frac{1}{2}$. Bei der Abbildung $\cancel{U(a)} \to K(a) = K_1$ habe $\overline{K}_{\frac{1}{2}}$ das Urbild $\cancel{\overline{U}(a)}$.

$\overline{K}_{\frac{1}{2}}$ ist kompakt und separabel, also auch $\cancel{\overline{U}(a)}$; wenn also $\mathfrak{G}$ durch endlich viele $\cancel{\overline{U}(a)}$ überdeckt werden kann, so ist es kompakt und separabel; wenn es durch abzählbar viele gelingt, ist es Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen und separabel. Umgekehrt: da a innerer Punkt von $\cancel{\overline{U}(a)}$ ist, genügen zur Überdeckung von $\mathfrak{G}$, falls es kompakt ist, endlich viele $\cancel{\overline{U}(a)}$ und, falls es separabel ist, abzählbar viele. Wir haben also gezeigt:

Bitte ein deutsches U!

$\mathfrak{U}(a)$

$\overline{\mathfrak{U}}(a)$

Bitte ein deutsches V!

$\mathfrak{G}$ **ist dann und nur dann kompakt bzw. separabel, wenn es durch endlich bzw. abzählbar viele $\overline{U}(a)$ überdeckt werden kann. Wenn es kompakt ist, ist es auch separabel; wenn es separabel ist, ist es allenfalls Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen.**

Wir werden im folgenden die Analytisierungsfrage für die „geschlossenen", d. h. kompakten, $\mathfrak{G}$ lösen, für die „offenen", d. h. bloß separablen, $\mathfrak{G}$ bleibt sie unerledigt. Im folgenden wird also $\mathfrak{G}$ durchweg als n-parametrig und kompakt vorausgesetzt.

2. In $\mathfrak{G}$ definierte stetige Funktionen, mit komplexen Zahlen als Werten, bezeichnen wir mit $f(x)$, $g(x)$, $k(x, y)$, $\varphi(x)$; die aufs Haarsche Maß gegründete Integration mit $\int_{\mathfrak{G}} f(x)\, dv_x$ (vgl. Einl. 3., insbesondere a) und Anm. [13], [14]). Wie a. a. O. gesagt wurde, ist das Maß von $\mathfrak{G}$ endlich, da dies für jede kompakte Menge der Fall ist; durch Multiplizieren aller Maße (und Integrale) mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{\mathit{Maß}\ \mathfrak{G}}$ können wir daher erreichen, daß $\mathit{Maß}\ \mathfrak{G} = 1$ wird[17]. Nun können wir die in Einl. 3. b) zitierten Betrachtungen von Peter und Weyl auf unser $\mathfrak{G}$ übertragen. (Vgl. auch Haar, a. a. O. Anm. [13], S. ▬.)

Vgl. S. 170.

Jedem stetigen Kern $k(x, y)$ ordnen wir den Integraloperator I_k zu, der durch

$$I_k f(x) = \int_{\mathfrak{G}} k(x, y) f(y)\, dv_y$$

[17] Dies ist die einzige Stelle, wo die Kompaktheit von $\mathfrak{G}$ wirklich wesentlich benötigt wird.

L 167-169

definiert ist. Die Methode von E. Schmidts Dissertation[18] ist auf dieses I_k wörtlich anwendbar, wenn es die Hermitesche Symmetrie hat, d. h. wenn $k(y, x) = \overline{k(x, y)}$ gilt. Infolgedessen treffen insbesondere die folgenden Behauptungen zu:

das soll Zahl Null sein!

Die von $\cancel{*}$ verschiedenen Eigenwerte von I_k bilden eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ (die Anzahl ihrer Elemente ist $0, 1, 2, \cdots$ oder abzählbar unendlich). Für jedes λ_ν gibt es unter den Eigenfunktionen, d. h. den Lösungen von $I_k f = \lambda_\nu f$, nur endlich viele linear unabhängige, ihre Maximalanzahl sei N_ν $(= 1, 2, \cdots)$. N_ν solche Eigenfunktionen können sogar normiert-orthogonal[19] gewählt werden: $f_1^{(\nu)}, \cdots, f_{N_\nu}^{(\nu)}$. Jede Funktion von der Form $I_k f$ (f beliebig) kann durch Linearaggregate endlich vieler $f_l^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, l = 1, \cdots, N_\nu)$ in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beliebig gut approximiert werden.

Sei nun $\varphi(x)$ eine stetige Funktion in $\mathfrak{G}$; wir setzen $k(x, y) = \varphi(x y^{-1})$, $I_k = T_\varphi$, und wenden das soeben Gesagte auf T_φ an. Hierzu ist allerdings $\varphi(y x^{-1}) = \overline{\varphi(x y^{-1})}$ notwendig, d. h. $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$.

T_φ hat die folgende Eigentümlichkeit: wenn es $f(x)$ in $g(x)$ überführt, so führt es $f(x \cdot a)$ in $g(x \cdot a)$ über (man ersetze in der definierenden Formel für $I_k = T_\varphi$ die Integrationsvariable y durch $y \cdot a^{-1}$ und beachte die Rechtsinvarianz sowie $x \cdot (y \cdot a^{-1})^{-1} = (x \cdot a) \cdot y^{-1}$). Also ist mit $f(x)$ auch $f(x \cdot a)$ Eigenfunktion von T_φ, und zwar vom selben Eigenwert; also ist $f_l^{(\nu)}(x \cdot a)$ Linearaggregat der $f_1^{(\nu)}(x), \cdots, f_{N_\nu}^{(\nu)}(x)$. Wir wollen jedes endliche normiert-orthogonale Funktionensystem $f_1(x), \cdots, f_N(x)$, für welches jedes $f_l(x \cdot a)$ $(l = 1, \cdots, N$, a in $\mathfrak{G})$ Linearaggregat der $f_1(x), \cdots, f_N(x)$ ist, ein Darstellungssystem nennen. Die $f_1^{(\nu)}(x), \cdots, f_{N_\nu}^{(\nu)}(x)$ sind somit Darstellungssysteme, und wir erkennen: Es gibt eine Folge (von $0, 1, 2, \cdots$ oder abzählbar unendlich vielen) Darstellungssystemen, so daß jede Funktion $T_\varphi f$ (φ fest, f beliebig) durch Linearaggregate endlich vieler ihrer Funktionen beliebig gut approximierbar ist.

Vgl. S. 170.

Gäbe es eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ von φ's, so daß jedes f durch $T_{\varphi_s} g$'s $(s = 1, 2, \cdots, g$ beliebig) beliebig gut approximierbar ist, so erhielten wir durch Zusammenfassung der Darstellungssystemfolgen von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ eine neue Darstellungssystemfolge, derart, daß jedes f durch Linearaggregate endlich vieler ihrer Funktionen beliebig gut approximierbar ist. Hieraus folgt noch, daß diese Folge nicht leer und auch nicht endlich sein kann.

[18] Math. Ann. **63** (1907), S. 433—476.

[19] Ein Funktionensystem $f_1, f_2, \cdots$ heißt normiert-orthogonal, wenn

$$\int_{\mathfrak{G}} f_j(x) \overline{f_l(x)}\, dv_x \begin{cases} = 1, & \text{für } j = l \\ = 0, & \text{für } j \neq l \end{cases}$$

gilt.

Bitte hier deutsches U !

Eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, für die $T_{\varphi_s} f$ für $s \to \infty$ gleichmäßig in G gegen f konvergiert (für jedes stetige f), hat die obige Eigenschaft. Wenn $\cancel{\mathfrak{V}_1}, \cancel{\mathfrak{V}_2}, \cdots$ sich auf 1 (Gruppeneinheit von G) zusammenziehende Umgebungen von 1 sind, und $\varphi_s(x)$ stets reell und $\geqq 0$, aber außerhalb von $\cancel{\mathfrak{V}_s} = 0$ ist und $\int_G \varphi_s(x)\, dv_x = 1$ gilt, sowie natürlich $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\ (= \overline{\varphi(x)})$, so leisten diese $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ offenbar das Gewünschte. Solche φ_s sind aber zu den $\cancel{\mathfrak{V}_s}$ leicht angebbar: Zunächst genügt $\int_G \varphi_s(x)\, dv_x > 0$ (statt $= 1$), da wir sonst $\varphi_s(x)$ durch $\dfrac{\varphi_s(x)}{\int_G \varphi_s(x)\, dv_x}$ ersetzen. Ferner ist $\varphi_s(x^{-1}) = \varphi_s(x)$ unnötig, da wir sonst $\varphi_s(x)$ durch $\varphi_s(x) + \varphi_s(x^{-1})$ ersetzen, gleichzeitig $\cancel{\mathfrak{V}_s}$ so weit verringernd, daß für alle x des neuen $\cancel{\mathfrak{V}_s}$ x, x^{-1} beide zum alten gehören. Weiter können wir $\cancel{\mathfrak{V}_s}$ in $V(1)$ liegend annehmen, sein bei $V(1) \to \bar{K}(\frac{1}{2})$ entstehendes Bild sei $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{V}$ enthält gewiß eine Kugel mit dem Mittelpunkt $0, \cdots, 0$, deren Radius sei $\varepsilon_s > 0$. Liegt x in $\cancel{\mathfrak{V}_s}$, so heiße die Distanz seines Bildpunktes (in $\bar{K}(\frac{1}{2})$) von $0, \cdots, 0$ $d_s(x)$. Dann erfüllt

Bitte ein deutsches U!

$$\varphi_s(x) \begin{cases} = \text{Max}\,(\varepsilon_s - d_s(x), 0), & \text{für } x \text{ in } \cancel{\mathfrak{V}_s} \\ = 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die übriggebliebenen Bedingungen.

Somit existiert die oben beschriebene Folge von Darstellungssystemen, wir nennen sie $f_1^{(\mu)}(x), \cdots, f_{M_\mu}^{(\mu)}(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$.

Bitte ein deutsches V !

3. $f_l^{(\mu)}(x \cdot a)$ ist Linearaggregat der $f_1^{(\mu)}(x), \cdots, f_{M_\mu}^{(\mu)}(x)$, also ist

$$f_l^{(\mu)}(x \cdot a) = \sum_{j=1}^{M_\mu} \alpha_{jl}^{(\mu)}(a)\, f_j^{(\mu)}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, l = 1, \cdots, M_\mu,\ a \text{ in } G).$$

Da die $f_j^{(\mu)}(x)$ normiert-orthogonal sind, ist

$$\alpha_{jl}^{(\mu)}(a) = \int_G f_l^{(\mu)}(x \cdot a)\, \overline{f_j^{(\mu)}(x)}\, dv_x,$$

Bitte ein deutsches G!

so daß $\alpha_{jl}^{(\mu)}(a)$ stetig von a abhängt. Ferner ist die Matrix $A^{(\mu)}(a) = \{\alpha_{jl}^{(\mu)}(a)\}_{j,l=1,\cdots,M_\mu}$ unitär, und es gilt offenbar $A^{(\mu)}(a \cdot b) = A^{(\mu)}(a)\, A^{(\mu)}(b)$. Die Matrizen $A^{(\mu)}(a)$ (μ fest) bilden also eine stetige Darstellung von G.

Bitte ein deutsches U!

Wenn für a, b von G $A^{(\mu)}(a) = A^{(\mu)}(b)$ für jedes $\mu = 1, 2, \cdots$ gilt, so ist nach Definition stets $f_l^{(\mu)}(x \cdot a) = f_l^{(\mu)}(x \cdot b)$. Daher muß $f(x \cdot a) = f(x \cdot b)$ für jedes f gelten, das Linearaggregat endlich vieler $f_l^{(\mu)}$ oder durch solche beliebig gut approximierbar ist — d. h. für jedes stetige $f \cdot x = b^{-1}$ ergibt: für jedes stetige f ist $f(ab^{-1}) = f(1)$, also muß $ab^{-1} = 1$, $a = b$ sein[20].

[20] Ist $c \neq 1$, so sei $\mathfrak{U}$ eine c nichtenthaltende Umgebung von 1. Konstruieren wir f zu $\mathfrak{U}$ so, wie weiter oben φ_s zu $\cancel{\mathfrak{V}_s}$, so wird $f(1) > 0$, $f(c) = 0$.

D. h.: Die Gesamtheit der Darstellungen $A^{(1)}(a), A^{(2)}(a), \cdots$ ist treu — aber wir brauchen eine einzelne (endlich vieldimensionale!) Darstellung, die es ist!

Sei $M_1 + \cdots + M_\mu = L_\mu$, reihen wir $A^{(1)}(a), \cdots, A^{(\mu)}(a)$ an der Diagonale einer L_μ-dimensionalen Matrix aneinander und besetzen die übrigen Felder mit Nullen, so entsteht eine L_μ-dimensionale Matrix $B^{(\mu)}(a)$ (vgl. Abb.); tun

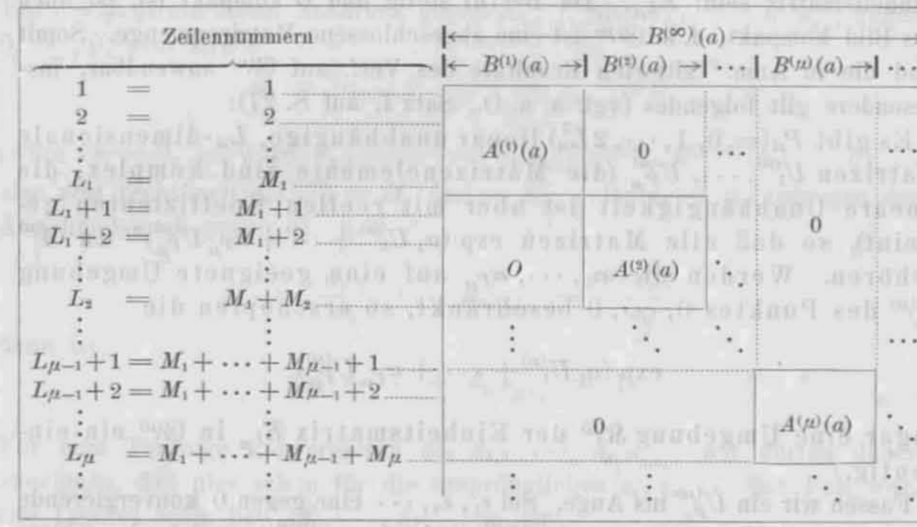


ABBILDUNG.

wir dasselbe mit allen $A^{(1)}(a), A^{(2)}(a), \cdots$, so entsteht eine unendlich vieldimensionale, aber zeilen- und kolonnenfinite Matrix $B^{(\infty)}(a)$ (vgl. Abb.). Die $B^{(\mu)}(a)$ sind offenbar unitäre Darstellungen von G, $B^{(\infty)}(a)$ ebenfalls. $B^{(\mu)}(a)$ hängt stetig von a ab, $B^{(\infty)}(a)$ ebenfalls, falls für unendliche Matrizen die Konvergenz durch die Konvergenz aller Matrizenelemente definiert wird[21]. Schließlich ist $B^{(\mu)}(a)$ der L_μ-te Abschnitt von $B^{(\infty)}(a)$. Die Menge aller $B^{(\mu)}(a)$ (a durchläuft ganz G) heiße $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, diejenige aller $B^{(\infty)}(a)$ $\mathfrak{G}^{(\infty)}$; $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ ist stetiges Bild von G, $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ nach dem weiter oben Gesagten ein-eindeutiges und stetiges Bild — da G kompakt ist, muß daher auch die Inverse der letzteren Abbildung stetig sein.

Im folgenden werden wir zeigen, daß schon ein $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ ein-eindeutiges Bild von G, d. h. schon ein $B^{(\mu)}(a)$ treu ist — womit das Programm von Einl. 2 erfüllt sein wird. Dazu werden wir aber die bisher kaum benutzte Beziehung von G zum n-dimensionalen (reellen) euklidischen Raume, d. i. die

[21] Diese Topologie der unendlichen Matrizen $\{\alpha_{jl}\}_{j,l=1,2,\ldots}$ kann aus verschiedenen Entfernungsbegriffen (vgl. a. a. O. Anm. [9], S. 94) hergeleitet werden, z. B. aus

$$\text{Entf.}\,(\{\alpha_{jl}\}, \{\beta_{jl}\}) = \underset{L=1,2,\ldots}{\text{Min}} \left\{ \text{Max} \left[\underset{j,l=1,\ldots,L}{\text{Max}} (|\alpha_{jl} - \beta_{jl}|), \frac{1}{L} \right] \right\}.$$

Abbildung von $U(1)$ auf $K(1)$, wirklich heranziehen müssen. (Bisher benutzten wir eigentlich nur, daß G topologisch, separabel und kompakt ist.)

4. Da $B^{(\mu)}(a)$ eine Darstellung ist, bildet es die Gruppe G auf eine Gruppe ab, d. h. $\mathfrak{S}^{(\mu)}$ ist eine Matrizengruppe. Wegen $1^2 = 1$ ist das Bild von 1 das eigene Quadrat, und da es unitär ist, muß es die L_μ-dimensionale Einheitsmatrix sein: E_{L_μ}. Da $B^{(\mu)}(a)$ stetig und G kompakt ist, ist auch das Bild kompakt, d. h. $\mathfrak{S}^{(\mu)}$ ist eine abgeschlossene Matrizenmenge. Somit sind die in Anm. [7] zitierten Resultate des Verf. auf $\mathfrak{S}^{(\mu)}$ anwendbar, insbesondere gilt folgendes (vgl. a. a. O., Satz I, auf S. 27):

Es gibt $P_\mu (= 0, 1, \cdots, 2L_\mu^2)$ linear unabhängige, L_μ-dimensionale Matrizen $U_1^{(\mu)}, \cdots, U_{P_\mu}^{(\mu)}$ (die Matrizenelemente sind komplex, die lineare Unabhängigkeit ist aber mit reellen Koeffizienten gemeint), so daß alle Matrizen $\exp(\alpha_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu)})$[22] zu $\mathfrak{S}^{(\mu)}$ gehören. Werden die $\alpha_1, \cdots, \alpha_{P_\mu}$ auf eine geeignete Umgebung $K^{(\mu)}$ des Punktes $0, \cdots, 0$ beschränkt, so erschöpfen die

$$\exp(\alpha_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu)})$$

sogar eine Umgebung $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ der Einheitsmatrix E_{L_μ} in $\mathfrak{S}^{(\mu)}$ ein-eindeutig.

Fassen wir ein $U_p^{(\mu)}$ ins Auge. Sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ eine gegen 0 konvergierende Folge von Zahlen > 0. $\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)})$ gehört zu $\mathfrak{S}^{(\mu)}$, es ist also einem $B^{(\mu)}(a)$ gleich, etwa für $a = a_p$. Die $B^{(\mu+1)}(a_p)$ liegen in $\mathfrak{S}^{(\mu+1)}$, sie haben daher einen Häufungspunkt. Wenn wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ durch eine Teilfolge ersetzen, können wir also erreichen, daß die $B^{(\mu+1)}(a_p)$ konvergieren. Auch das monotone Abnehmen der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ ist durch Aussondern einer Teilfolge erreichbar. Wir dürfen daher annehmen, daß beides für die ursprünglichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ der Fall war. Es ist

$$\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1} \to 0, \qquad \varepsilon_s - \varepsilon_{s+1} > 0,$$

und

$$B^{(\mu)}(a_s a_{s+1}^{-1}) = B^{(\mu)}(a_s) B^{(\mu)}(a_{s+1})^{-1}$$
$$= \exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)}) \exp(\varepsilon_{s+1} U_p^{(\mu)}) = \exp((\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1}) U_p^{(\mu)}),$$
$$B^{(\mu+1)}(a_s a_{s+1}^{-1}) = B^{(\mu+1)}(a_s) B^{(\mu+1)}(a_s)^{-1} \to E_{L_{\mu+1}},$$

wenn wir also $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ durch $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \cdots$ ersetzen, so tritt $a_s' = a_s a_{s+1}^{-1}$ mit $B^{(\mu+1)}(a_s') \to E_{L_{\mu+1}}$ an die Stelle von a_s. Wir dürfen daher annehmen, daß $B^{(\mu+1)}(a_s) \to E_{L_{\mu+1}}$ schon für die ursprünglichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ der Fall war.

---

[22] Ist A eine endlich vieldimensionale Matrix, so ist $\exp(A)$ als $\lim_{h\to\infty} \sum_{s=0}^{h} \frac{A^s}{s!}$ definiert. Vgl. a. a. O. Anm. [7], S. 7–15.

Fast alle $B^{(\mu+1)}(a_s)$, $B^{(\mu)}(a_s)$ gehören also zu $\mathfrak{K}^{(\mu+1)}$ bzw. $\mathfrak{K}^{(\mu)}$, für diese ist

$$B^{(\mu+1)}(a_s) = \exp(\alpha_{s,1} U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \alpha_{s,P^{(\mu+1)}} U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}),$$
$$\alpha_{s,1}, \cdots, \alpha_{s,P^{(\mu+1)}} \text{ aus } K^{(\mu+1)}.$$

Für $s \to \infty$ strebt dieser Ausdruck gegen $E_{L_{\mu+1}}$, also $\alpha_{s,1}, \cdots, \alpha_{s,P_{\mu+1}}$ gegen $0, \cdots, 0$, also strebt

$$\alpha_s = |\alpha_{s,1}| + \cdots + |\alpha_{s,P_{\mu+1}}| > 0$$

(wäre es $= 0$, so wäre $\alpha_{s,1} = \cdots = \alpha_{s,P_{\mu+1}} = 0$, $B^{(\mu+1)}(a_s) = E_{L_{\mu+1}}$, also erst recht $\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)}) = B^{(\mu)}(a_s) = E_{L_\mu}$, also $\varepsilon_s = 0$, entgegen der Annahme) auch gegen 0. Sei

$$\beta_{s,1} = \frac{\alpha_{s,1}}{\alpha_s}, \cdots, \beta_{s,P_{\mu+1}} = \frac{\alpha_{s,P_{\mu+1}}}{\alpha_s},$$

dann ist

$$|\beta_{s,1}| + \cdots + |\beta_{s,P_{\mu+1}}| = 1.$$

Für eine Teilfolge konvergieren die $\beta_{s,1}, \cdots, \beta_{s,P_{\mu+1}}$; wir dürfen daher annehmen, daß dies schon für die ursprünglichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ der Fall war. Die Limites seien bzw. $\bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_{P_{\mu+1}}$, es ist

$$|\bar\beta_1| + \cdots + |\bar\beta_{P_{\mu+1}}| = 1.$$

Nennen wir den L_μ-Abschnitt von $U_q^{(\mu+1)}$ $\tilde U_q^{(\mu+1)}$. Da $B^{(\mu)}(a_s)$ der L_μ-Abschnitt von $B^{(\mu+1)}(a_s)$ ist, d. h. $\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)})$ der von

$$\exp(\alpha_s(\beta_{s,1} U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \beta_{s,P_{\mu+1}} U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)})),$$

ist

$$\exp(\varepsilon_s U_p^{(\mu)}) = \exp(\alpha_s(\beta_{s,1} \tilde U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \beta_{s,P_{\mu+1}} \tilde U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)})).$$

Sobald ε_s, α_s klein genug sind, d. h. für fast alle s, folgt hieraus

$$\varepsilon_s U_p^{(\mu)} = \alpha_s(\beta_{s,1} \tilde U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \beta_{s,P_{\mu+1}} \tilde U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}).$$

Somit konvergiert für $s \to \infty$

$$\frac{\varepsilon_s}{\alpha_s} U_p^{(\mu)} \text{ gegen } \bar\beta_1 \tilde U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \bar\beta_{P_{\mu+1}} \tilde U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}.$$

Da sowohl $U_p^{(\mu)}$ als auch der Limes $\neq 0$ ist, folgt hieraus, daß $\frac{\varepsilon_s}{\alpha_s}$ gegen einen Limes $\gamma \neq 0$ strebt; dann muß aber

$$U_p^{(\mu)} = \frac{\bar{\beta}_1}{\gamma}\,\tilde{U}_1^{(\mu+1)} + \cdots + \frac{\bar{\beta}_{P_{\mu+1}}}{\gamma}\,\tilde{U}_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}$$

sein, d. h. $U_p^{(\mu)}$ ist der L_μ-Abschnitt von $\frac{\bar{\beta}_1}{\gamma}\,U_1^{(\mu+1)} + \cdots + \frac{\bar{\beta}_{P_{\mu+1}}}{\gamma}\,U_{P_{\mu+1}}^{(\mu+1)}$.

Somit ist jedes $U_p^{(\mu)}$, $p = 1, \cdots, P_\mu$, L_μ-Abschnitt eines Linearaggregats der $U_q^{(\mu+1)}$, $q = 1, \cdots, P_{\mu+1}$. Diese Linearaggregate müssen linear unabhängig sein, weil es schon ihre L_μ-Abschnitte $U_p^{(\mu)}$ sind, also ist $P_\mu \leqq P_{\mu+1}$. Ferner können wir die $U_q^{(\mu+1)}$, $q = 1, \cdots, P_{\mu+1}$, so umbezeichnen (nämlich linear transformieren), daß diese P_μ Linearaggregate gerade bzw. den $U_1^{(\mu+1)}, \cdots, U_{P_\mu}^{(\mu+1)}$ gleich werden. Nehmen wir diese Transformation nacheinander für $\mu = 1, 2, \cdots$ vor, so erreichen wir allgemein: $U_p^{(\mu)}$ ist der L_μ-Abschnitt von $U_p^{(\mu+1)}$. Dies werde im folgenden vorausgesetzt.

5. Wir betrachten für jedes $\nu \geqq \mu$ $\exp(x_1 U_1^{(\nu)} + \cdots + x_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\nu)})$ und nennen dasjenige a, dessen $B^{(\nu)}(a)$ diesem Ausdruck gleich ist, $a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu})$. Die $a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu})$ haben für $\nu \to \infty$ einen Häufungspunkt $a(x_1 \cdots x_{P_\mu})$, weil G kompakt ist. Ferner ist für $\nu \geqq \mu_1$ $(\geqq \mu)$ der L_{μ_1}-Abschnitt von $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ derselbe wie derjenige von

$$B^{(\nu)}(a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu})) = \exp(x_1 U_1^{(\nu)} + \cdots + x_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\nu)}),$$

und zwar gleich

$$B^{(\mu_1)}(a) = \exp(x_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + x_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu_1)}),$$

also von ν unabhängig. Daher ist dies auch der L_{μ_1}-Abschnitt von $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$, d. h. fast alle $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ haben denselben L_{μ_1}-Abschnitt wie $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$. Wegen $L_{\mu_1} \to \infty$ bedeutet das, daß $B^{(\infty)}(a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ für $\nu \to \infty$ gegen $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ konvergiert (vgl. das Ende von 3. sowie Anm. [21]), also auch, daß $a_\nu(x_1 \cdots x_{P_\mu})$ gegen $a(x_1 \cdots x_P)$ konvergiert (vgl. ebendort). Da der L_{μ_1}-Abschnitt von $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$

$$\exp(x_1 U_1^{(\mu_1)} + \cdots + x_{P_\mu} U_{P_\mu}^{(\mu_1)})$$

ist, also stetig in $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$, ist jedes Matrixelement von $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ stetig in $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$ also (vgl. das Ende von 3.) auch dieses selbst sowie $a(x_1 \cdots x_{P_\mu})$. Liegt $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$ in $K^{(\mu)}$, so hängt schon der L_μ-Abschnitt von $B^{(\infty)}(a(x_1 \cdots x_{P_\mu}))$ ein-eindeutig von $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$ ab, um so mehr dieses selbst sowie $a(x_1 \cdots x_{P_\mu})$. Da jeder L_{μ_1}-Abschnitt von $B^{(\infty)}(a(0 \cdots 0))$ gleich $E_{L_{\mu_1}}$ ist, ist dieses die Einheitsmatrix, also $a(0 \cdots 0) = 1$. Wenn wir also $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$ auf eine hinreichend kleine Umgebung $\tilde{K}^{(\mu)}$ von $0, \cdots, 0$ beschränken, so liegt $a(x_1 \cdots x_{P_\mu})$ jedenfalls in $U(1)$ (in G).

Also bildet $a(x_1 \cdots x_{P_\mu})$ ein Gebiet $\tilde{K}^{(\mu)}$ im P_μ-dimensionalen euklidischen Raume ein-eindeutig und stetig auf eine Teilmenge von $U(1)$ ab, das seinerseits ein-eindeutiges und stetiges Bild eines Gebietes $K(1)$ im n-dimensionalen euklidischen Raume ist. Aus Brouwers Satz von der Gebietsinvarianz (vgl. a. a. O. Anm. [16]) folgt daher $P_\mu \leqq n$. Also ist $P_1 \leqq P_2 \leqq \cdots \leqq n$, von einem gewissen $\bar{\mu}$ an sind also die P_μ konstant: $P_{\bar{\mu}} = P_{\bar{\mu}+1} = \cdots = P \leqq n$.

6. Sei $\mu \geqq \bar{\mu}$. $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ ist in einer Umgebung des Punktes E_{L_μ} mit dem Gebiet $K^{(\mu)}$ im P-dimensionalen Raume homöomorph, also P-dimensional; wegen der Gruppeneigenschaft gilt das für jeden Punkt, also ist es als topologischer Raum P-dimensional (vgl. Mengers in Anm. [16] zitiertes Werk, S. 79—80). Als kompakte P-dimensionale Menge im $2L_\mu^2$-dimensionalen euklidischen Raume der L_μ-dimensionalen Matrizen, fällt es unter den „Allgemeinen Zerlegungssatz" der Dimensionstheorie (a. a. O. S. 156): Zu jedem $\varepsilon > 0$ können endlich viele Mengen $\mathfrak{H}_1, \cdots, \mathfrak{H}_{\bar{t}}$ gefunden werden (natürlich von μ, ε abhängend), so daß 1. jedes $\mathfrak{H}_t$ einen Diameter $\leqq \varepsilon$ hat[23], 2. je $P+2$ Mengen $\mathfrak{H}_t$ keinen gemeinsamen Punkt haben, 3. $\mathfrak{H}_1 + \cdots + \mathfrak{H}_t = \mathfrak{G}^{(\mu)}$ ist. Nun sei $\mathfrak{H}'_t$ die Menge aller $B^{(\infty)}(a)$ mit $B^{(\mu)}(a)$ in $\mathfrak{H}_t$. Wieder gilt: 2′. je $P+2$ Mengen $\mathfrak{H}'_t$ haben keinen gemeinsamen Punkt, 3′. $\mathfrak{H}'_1 + \cdots + \mathfrak{H}'_t = \mathfrak{G}^{(\infty)} =$ *Menge aller* $B^{(\infty)}(a)$. Ferner ist die Entfernung von $B^{(\infty)}(a)$ und $B^{(\infty)}(b)$ im Sinne von Anm. [21] $\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\mu}, d\right)$, wenn d die Entfernung ihrer L_μ-Abschnitte, d. h. von $B^{(\mu)}(a)$, $B^{(\mu)}(b)$ ist. Somit ist der Diameter von $\mathfrak{H}'_t \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\mu}, \bar{d}_t\right)$, wenn $\bar{d}_t$ der Diameter von $\mathfrak{H}_t$ ist, d. h. $\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\mu}, \varepsilon\right)$. Für hinreichend großes $\mu \left(\mu \geqq \frac{1}{\varepsilon}\right)$ gilt also auch: 1′. jedes $\mathfrak{H}'_t$ hat einen Diameter $\leqq \varepsilon$. Nach der „Umkehrung des allgemeinen Zerlegungssatzes" (a. a. O. S. 157) ist daher $\mathfrak{G}^{(\infty)} \leqq P$-dimensional. Da es aber G homöomorph ist, ist es, wie dieses, n-dimensional. Also ist $P \geqq n$.

Somit ist $P = n$, d. h. $P_{\bar{\mu}} = P_{\bar{\mu}+1} = \cdots = n$.

7. Die in 5. aufgestellte homöomorphe Abbildung von $x_1, \cdots, x_{P_\mu}$ auf $a(x_1, \cdots, x_{P_\mu})$ bildet nach dem soeben Bewiesenen für $\mu \geqq \bar{\mu}$ (wir halten μ fest) die $x_1, \cdots, x_n$ auf die $a(x_1 \cdots x_n)$ ab, u. zw. ein Gebiet $\tilde{K}^{(\mu)}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes auf eine Teilmenge U von $U(1)$, das einem Gebiet des n-dimensionalen euklidischen Raumes homöomorph ist. Aus Brouwers Satz von der Gebietsinvarianz (vgl. a. a. O. Anm. [16]) folgt daher, daß dieses Bild U innere Punkte besitzt.

[23] Um besseren Anschluß an die in Anm. [21] definierte Entfernung bei unendlich vieldimensionalen Matrizen zu wahren, definieren wir bei P-dimensionalen Matrizen die Entfernung so (das ist der in a. a. O. Anm. [7] verwendeten, und zur gewöhnlichen Topologie führenden, topologisch gleichwertig):

$$\text{Entf.}\,(\{\alpha_{jl}\}, \{\beta_{jl}\}) = \operatorname*{Max}_{j,l=1,\cdots,P}\,(|\alpha_{jl} - \beta_{jl}|).$$

Seien a, b Punkte von U, $B^{(\mu)}(a) = B^{(\mu)}(b)$ $(\mu \geqq \bar{\mu})$. Es ist

$$a = a(x_1 \cdots x_n), \qquad B^{(\mu)}(a) = \exp(x_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + x_n U_n^{(\mu)}),$$

ebenso

$$b = b(y_1 \cdots y_n), \qquad B^{(\mu)}(b) = \exp(y_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + y_n U_n^{(\mu)}),$$

also

$$\exp(x_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + x_n U_n^{(\mu)}) = \exp(y_1 U_1^{(\mu)} + \cdots + y_n U_n^{(\mu)}),$$

und da $x_1, \cdots, x_n$ und $y_1, \cdots, y_n$ zu $\tilde{K}^{(\mu)}$ gehören,

$$x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n.$$

Also ist $a = b$. Für $a \neq b$ ist somit

$$B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b).$$

Die Menge der $x \cdot c$, x in U, heiße $U \cdot c$. Ist $\bar{a}$ innerer Punkt von U so ist stets a innerer Punkt von $U \cdot (\bar{a}^{-1} \cdot a)$, d. h. jeder Punkt von G ist innerer Punkt eines $U \cdot c$. Da G kompakt ist, genügen endlich viele $U \cdot c$, etwa $U \cdot c_1, \cdots, U \cdot c_{\bar{r}}$, um ganz G zu überdecken. Da auch in $U \cdot c$ aus $a \neq b$ $B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b)$ folgt (denn $a \cdot c^{-1}$, $b \cdot c^{-1}$ gehören zu U, also ist wegen $a \cdot c^{-1} \neq b \cdot c^{-1}$ $B^{(\mu)}(a \cdot c^{-1}) \neq B^{(\mu)}(b \cdot c^{-1})$, $B^{(\mu)}(a) \cdot B^{(\mu)}(c)^{-1} \neq B^{(\mu)}(b) \cdot B^{(\mu)}(c)^{-1}$, $B^{(\mu)}(a) \neq B^{(\mu)}(b)$), erkennen wir: in jedem $U \cdot c_r$ $(r = 1, \cdots, \bar{r})$ kommt höchstens ein a mit $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$ vor, insgesamt gibt es also $\leqq \bar{r}$ solche a.

Nennen wir die Menge der a mit $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$ E_μ, sie ist offenbar eine Untergruppe von G, $E_1 \supseteqq E_2 \supseteqq \cdots$. Nach obigem ist sie für $\mu \geqq \bar{\mu}$ endlich. Die Elementzahlen der endlichen $E_{\bar{\mu}} \supseteqq E_{\bar{\mu}+1} \supseteqq \cdots$ sind monoton-nichtfallend, also von einer gewissen Stelle $\mu = \bar{\bar{\mu}}$ an konstant. Die $E_{\bar{\bar{\mu}}} \supseteqq E_{\bar{\bar{\mu}}+1} \supseteqq \cdots$ haben alle gleich viele Elemente, also ist $E_{\bar{\bar{\mu}}} = E_{\bar{\bar{\mu}}+1} = \cdots$. Wenn a zu $E_{\bar{\bar{\mu}}}$ gehört, so gehört es demnach zu allen E_μ, $\mu \geqq \bar{\bar{\mu}}$, mithin sind alle $B^{(\mu)}(a) = E_{L_\mu}$ (für $\mu \geqq \bar{\bar{\mu}}$, also für alle μ). Daher ist auch $B^{(\infty)}(a)$ die Einheitsmatrix, also $= B^{(\infty)}(1)$, aber $B^{(\infty)}(x)$ ist ein-eindeutig (vgl. 3.), also $a = 1$. Da somit $E_{\bar{\bar{\mu}}}$ nur die 1 enthält, ist für $a \neq 1$ $B^{(\bar{\bar{\mu}})}(a) \neq E_{L_\mu}$, also für $a \neq b$ $B^{(\bar{\bar{\mu}})}(a) \neq B^{(\bar{\bar{\mu}})}(b)$. Also ist $B^{(\bar{\bar{\mu}})}(a)$ ein-eindeutig, d. h. treu.

Hieraus folgt, daß $B^{(\bar{\bar{\mu}})}(a)$ eine homöomorphe Abbildung ist, G ist $\mathfrak{G}^{(\bar{\bar{\mu}})}$ homöomorph und isomorph, so daß $B^{(\bar{\bar{\mu}})}(a)$ und $\mathfrak{G}^{(\bar{\bar{\mu}})}$ die Eigenschaften der in Einl. 2. erörterten $D(a)$, G' besitzen. Wir formulieren das Resultat:

SATZ I. *Die einzigen topologischen Gruppen, die (im Sinne von* I., 1.) *n-parametrig und kompakt sind, sind die abgeschlossenen Gruppen aus unitären Matrizen endlich vieldimensionaler (komplexer*[24]*) euklidischer Räume sowie die diesen homöomorph-isomorphen Gruppen.*

[24] Man kann sich auch aufs Reelle beschränken: dazu muß die Dimensionszahl des betreffenden Raumes verdoppelt und die imaginäre Einheit i durch die Matrix $\begin{Bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Bmatrix}$ ersetzt werden.

II. Transformationsgruppen G topologischer Räume M.

1. Eine topologische Gruppe G heiße eine stetige Transformationsgruppe von M, wenn jedem a von G eine homöomorphe (d. h. ein-eindeutige und stetige) Abbildung von M auf M zugeordnet ist: $F_a(\xi)$ (ξ durchläuft M); dabei soll noch

1. die Funktionalgleichung

$$F_b(F_a(\xi)) = F_{a \cdot b}(\xi)$$

gelten,

2. $F_a(\xi)$ ist als Funktion von a (bei festgehaltenem ξ) stetig.

Wir setzen im folgenden G n-parametrig und kompakt sowie in M transitiv voraus, über M machen wir dagegen keine weiteren Annahmen.

Somit ist G mit einer abgeschlossenen Gruppe unitärer Transformationen eines endlich viel- (etwa k-) dimensionalen Raumes homöomorph und isomorph (Satz I), und wir können es vorläufig mit der betr. Gruppe identifizieren. Ferner zeichnen wir ein Element ξ_0 von M aus und bilden für jedes ξ von M die Menge aller a von G mit $F_a(\xi_0) = \xi$: $H(\xi)$. $H(\xi)$ ist offenbar abgeschlossen und wegen der Transitivität nicht leer; $H(\xi_0)$ hat die Gruppeneigenschaft, ist also eine abgeschlossene Untergruppe von G; die $H(\xi)$ sind die Rechtsnebengruppen von $H(\xi_0)$. Jedes a von G gehört genau einem $H(\xi)$ an: dem mit $\xi = F_a(\xi_0)$, und demnach hängt ξ stetig von a ab.

Wir wenden den in I., 4. für die dortigen $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ herangezogenen Satz auf G und $H(\xi_0)$ an, dadurch mögen die (k-dimensionalen) Matrizen $U_1', \cdots, U_n'$ und $U_1, \cdots, U_l$ entstehen. Aus Brouwers Satz von der Invarianz der Dimensionszahl (a. a. O. Anm. [16]) folgt, da G gleichzeitig n- und n'-parametrig ist, $n = n'$. Da $H(\xi_0)$ Untergruppe von G ist, sind die $U_1, \cdots, U_l$ Linearaggregate der $U_1', \cdots, U_n'$. Somit ist $l \leqq n$, und wir können die $U_1', \cdots, U_n'$ so umbezeichnen (nämlich linear transformieren), daß

$$U_1' = U_1, \cdots, U_l' = U_l$$

wird. Wir lassen daher die Akzente überhaupt fort: zu G gehören $U_1, \cdots, U_n$, zu $H(\xi_0)$ $U_1, \cdots, U_l$ $(l \leqq n)$.

2. Wir betrachten die k-dimensionalen Matrizen $\exp(n_1 U_{l+1} + \cdots + n_{n-l} U_n)$ ($n_1, \cdots, n_{n-l}$ reell) und behaupten: es gibt eine Umgebung U^* von $0, \cdots, 0$ im (reellen) $n-l$-dimensionalen euklidischen Raume, so daß für $u_1, \cdots, u_{n-l}$ und $v_1, \cdots, v_{n-l}$ aus U^* und a, b aus $H(\xi_0)$

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n) \cdot a = \exp(v_1 U_{l+1} + \cdots + v_{n-l} U_n) \cdot b$$

die Folge

$$u_1 = v_1, \cdots, u_{n-l} = v_{n-l}$$

(und damit auch $a = b$) hat. Letzteres kann auch

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n)^{-1} \cdot \exp(v_1 U_{l+1} + \cdots + v_{n-l} U_n) = a \cdot b^{-1}$$

geschrieben werden, d. h. es besagt, daß die linke Seite zu $H(\xi_0)$ gehört.

Wäre die obige Behauptung falsch, so gäbe es zwei Folgen $u_1^{(\nu)}, \cdots, u_{n-l}^{(\nu)}$ und $v_1^{(\nu)}, \cdots, v_{n-l}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$, beide gegen $0, \cdots, 0$ konvergierend, so daß für kein ν

$$u_1^{(\nu)} = v_1^{(\nu)}, \cdots, u_{n-l}^{(\nu)} = v_{n-l}^{(\nu)}$$

ist, und für jedes ν

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n)^{-1} \exp(v_1 U_{l+1} + \cdots + v_{n-l} U_n)$$

zu $H(\xi_0)$ gehört. Da dieser Ausdruck gegen E_k konvergiert, kann er nach dem in I., 4. verwendeten Satze für fast alle ν in der Form $\exp(w_1^{(\nu)} U_1 + \cdots + w_l^{(\nu)} U_l)$ geschrieben werden, wobei auch $w_1^{(\nu)}, \cdots, w_l^{(\nu)}$ gegen $0, \cdots, 0$ konvergiert. Die vorliegende Gleichheit kann auch

$$\exp(w_1^{(\nu)} U_{l+1} + \cdots + u_{n-l}^{(\nu)} U_n) \cdot \exp(w_1^{(\nu)} U_1 + \cdots + w_l^{(\nu)} U_l)$$
$$= \exp(v_1^{(\nu)} U_{l+1} + \cdots + v_{n-l}^{(\nu)} U_n)$$

geschrieben werden, d. h. der Ausdruck

$$\exp(x_{l+1} U_{l+1} + \cdots + x_n U_n) \cdot \exp(x_1 U_1 + \cdots + x_l U_l)$$

hat bei Ersetzung der Variablenreihe $x_1, \cdots, x_n$ durch $w_1^{(\nu)}, \cdots, w_l^{(\nu)}, u_1^{(\nu)}, \cdots, u_{n-l}^{(\nu)}$ und durch $0, \cdots, 0, v_1^{(\nu)}, \cdots, v_{n-l}^{(\nu)}$ denselben Wert. Wenn er, falls $x_1, \cdots, x_n$ auf eine hinreichend kleine Umgebung von $0, \cdots, 0$ beschränkt werden, $x_1, \cdots, x_n$ eindeutig festlegt, so hat das Obige für fast alle ν $u_1^{(\nu)} = v_1^{(\nu)}, \cdots, u_{n-l}^{(\nu)} = v_{n-l}^{(\nu)}$ zur Folge, d. h. einen Widerspruch mit der Annahme.

Wir entwickeln den obigen Ausdruck in eine (überall konvergente) Potenzreihe[25] und deuten alle Glieder von Graden $\geqq 2$ nur durch $***$ an. Er ist dann gleich:

$$1 + x_1 U_1 + \cdots + x_n U_n + ***.$$

Die Matrizen $U_1, \cdots, U_n$ sind (reell) linear unabhängig. Wir ergänzen sie zu einem vollständigen linear unabhängigen System, indem wir $U_{n+1}, \cdots, U_{2k^2}$ irgendwie demgemäß hinzufügen. Den obigen Ausdruck minus 1 stellen wir dann als Linearaggregat von $U_1, \cdots, U_{2k^2}$ dar, die Koeffizienten sind dann eindeutig bestimmt, u. zw. sind diejenigen von $U_1, \cdots, U_n$ gleich

$$x_1 + ***, \cdots, x_n + ***.$$

[25] Die Potenzreihenbetrachtung ließe sich vermeiden, aber am Ende von 3. kommt ohnehin eine solche vor.

Wenn wir zeigen können, daß die Gleichungen

$$x_1 + *** = y_1, \cdots, x_n + *** = y_n$$

nach $x_1, \cdots, x_n$ (falls diese auf eine hinreichend kleine Umgebung von $0, \cdots, 0$ beschränkt werden) aufgelöst werden können, so sind wir am Ziele. Sie können aber offenbar durch $y_1, \cdots, y_n$-Potenzreihen für $x_1, \cdots, x_n$ aufgelöst werden. Damit ist die Existenz der Umgebung U^* von $0, \cdots, 0$ mit der weiter oben behaupteten Eigenschaft bewiesen.

Diese Eigenschaft kann auch so formuliert werden: Wenn $u_1, \cdots, u_{n-l}$ in U^* liegt, so liegt jedes $\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n)$ in einer anderen Menge $H(\xi)$. Das zugehörige $\xi = \xi(u_1, \cdots, u_{n-l})$ in M ist somit eineindeutige Funktion von $u_1, \cdots, u_{n-l}$ und auch stetige Funktion derselben, da es stetig vom Ausdruck $\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n)$ abhängt.

3. In dem in I., 4. verwendeten Satze kam eine Umgebung $\mathfrak{K}^{(\mu)}$ von 1 in $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ und eine Umgebung $K^{(\mu)}$ von $0, \cdots, 0$ im P_μ-dimensionalen Raume vor; wir ersetzen jetzt $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ durch $H(\xi_0)$, P_μ durch $n - l$, dann mögen $\mathfrak{K}^{(\mu)}$, $K^{(\mu)}$ $\mathfrak{H}$, H heißen. Wenn $u_1, \cdots, u_{n-l}$ in U^* liegt und $w_1, \cdots, w_l$ in H, so nimmt

$$a(u_1 \cdots u_{n-l} w_1 \cdots w_l) = \exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n) \cdot \exp(w_1 U_1 + \cdots + w_l U_l)$$

denselben Wert nicht zweimal an: Denn dazu müßten die $\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n)$ im selben $H(\xi)$ liegen, also die $u_1, \cdots, u_{n-l}$ dieselben sein; alsdann müßte $\exp(w_1 U_1 + \cdots + w_l U_l)$ denselben Wert haben, also auch $w_1, \cdots, w_l$ dieselben sein. Somit bildet es die beschriebene $u_1, \cdots, u_{n-l} w_1, \cdots, w_l$-Menge homöomorph auf eine Teilmenge von G ab. Da aber die erstere Menge ein Gebiet des n-dimensionalen (reellen) euklidischen Raumes ist und da das Bild Teilmenge einer Umgebung der 1 in G ist, welche letztere einem ebensolchen Gebiet homöomorph angenommen werden kann (G ist n-parametrig!), muß nach dem Brouwerschen Satz von der Gebietsinvarianz (vgl. a. a. O. Anm.[16], übrigens ist er hier, wo es sich durchweg um analytische Abbildungen handelt, selbstverständlich) das Bild ebenfalls offen sein (in G). Somit ist es eine Umgebung W der (dazugehörigen) 1.

Wenn ein ξ von M nahe genug bei ξ_0 liegt, so ist es ein $\xi(u_1 \cdots u_{n-l})$, $u_1, \cdots, u_{n-l}$ in U^*. Sonst gäbe es nämlich eine gegen ξ_0 konvergente Folge $\xi^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$, in der das nie der Fall ist. Nun ist $\xi^{(\nu)}$ jedenfalls $= F_{a^{(\nu)}}(\xi_0)$, eine Teilfolge der $a^{(\nu)}$, konvergiert, da G kompakt ist; also können wir annehmen, daß es die $a^{(\nu)}$-Folge selbst tut. Der Limes sei a_0, dann ist $F_{a_0}(\xi_0)$ des Limes der $\xi^{(\nu)} = F_{a^{(\nu)}}(\xi_0)$, d. h. ξ_0, so daß a_0 zu $H(\xi_0)$ gehört. Also ist auch $\xi^{(\nu)} = F_{a^{(\nu)} a_0^{-1}}(\xi_0)$, und $a^{(\nu)} a_0^{-1}$ konvergiert gegen 1; wir können daher annehmen, daß es schon die $a^{(\nu)}$ taten, d. h. $a_0 = 1$. Dann liegen fast alle $a^{(\nu)}$ in der Menge der

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n) \cdot \exp(w_1 U_1 + \cdots + w_l U_l),$$

$u_1, \cdots, u_{n-l}$ in U^*, $w_1, \cdots, w_l$ in H. $a^{(\nu)}$, also auch dieses

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_{l+1}).$$

gehört zu $H(\xi^{(\nu)})$, daher ist

$$\xi^{(\nu)} = \xi(u_1, \cdots, u_{n-l}),$$

entgegen der Voraussetzung.

$\xi(u_1, \cdots, u_{n-l})$ bildet somit U^* homöomorph auf eine Teilmenge von M ab, von der ξ_0 innerer Punkt ist. Sei O eine in ihr enthaltene Umgebung von ξ_0, wegen der Homöomorphie der Abbildung ist das Urbild U_0 von O eine (Relativ-) Umgebung von $0, \cdots, 0$ in U^* — d. h. eine Umgebung von $0, \cdots, 0$.

Damit ist die Umgebung O von ξ_0 in M homöomorph auf die $n-l$ Parameter $u_1, \cdots, u_{n-l}$ in U_0 bezogen. In einer Umgebung $\mathfrak{K}$ von 1 in G ist, wie wir wissen, G durch $a = \exp(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_n U_n)$ homöomorph auf die n Parameter $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ in K bezogen. Das Kompositionsgesetz von G lautet:

$$\exp(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_n U_n) \cdot \exp(\beta_1 U_1 + \cdots + \beta_n U_n)$$
$$= \exp(\gamma_1 U_1 + \cdots + \gamma_n U_n)$$

(alles in K), u. zw. ist diese Gleichung in hinreichender Nähe von $0, \cdots, 0$ eindeutig nach $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ auflösbar. Das Transformationsgesetz von G in M lautet (soweit die linke Seite in W liegt):

$$\exp(u_1 U_{l+1} + \cdots + u_{n-l} U_n) \cdot \exp(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_n U_n)$$
$$= \exp(v_1 U_{l+1} + \cdots + v_{n-l} U_n) \cdot \exp(w_1 U_1 + \cdots + w_l U_l)$$

($u_1, \cdots, u_{n-l}$ und $v_1, \cdots, v_{n-l}$ in U^*, $w_1, \cdots, w_l$ in H), u. zw. ist auch diese Gleichung in hinreichender Nähe von $0, \cdots, 0$ eindeutig nach $v_1, \cdots, v_{n-l}, w_1, \cdots, w_l$ auflösbar (es interessieren uns nur $v_1, \cdots, v_{n-l}$). Wir haben noch zu zeigen, daß $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ von $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ und $v_1, \cdots, v_{n-l}, w_1, \cdots, w_l$ von $u_1, \cdots, u_{n-l}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ analytische Funktionen sind. Die erste Aufgabe ist Spezialfall der zweiten: mit $l = 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ für $u_1, \cdots, u_n$, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ für $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ für $v_1, \cdots, v_n$; daher genügt es, diese zu betrachten. Wenn wir in der obigen Gleichung beide Seiten durch ihre (überall konvergenten) Potenzreihen ersetzen und alle Glieder von Graden $\geqq 2$ nur durch $***$ andeuten, so entsteht die Matrixgleichung:

$$1 + \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_l U_l + (\alpha_{l+1} + u_1) U_{l+1} + \cdots + (\alpha_{n-l} + u_n) U_n + \cdots + ***$$
$$= 1 + w_1 U_1 + \cdots + w_l U_l + v_1 U_{l+1} + \cdots + v_{n-l} U_n + ***,$$

woraus (da $U_1, \cdots, U_n$ linear unabhängig sind) jedenfalls Zahlengleichungen

$$\alpha_1 + *** = w_1 + ***, \cdots, \alpha_l + \cdots = w_l + ***,$$
$$\alpha_{l+1} + u_1 + *** = v_1 + ***, \cdots, \alpha_n + u_{n-l} + *** = v_{n-l} + ***$$

folgen. Diese können offenbar durch $u_1, \cdots, u_{n-l}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$-Potenzreihen für $v_1, \cdots, v_{n-l}, w_1, \cdots, w_l$ aufgelöst werden, womit die Analytizität dieser Größen bewiesen ist.

Unser Resultat lautet also:

SATZ II. *Die topologische Gruppe G sei (im Sinne von I., 1.) n-parametrig und kompakt und (im Sinne von II., 1.) eine stetige Transformationsgruppe des topologischen Raumes M*[26]. *Ferner sei G in M transitiv. Es ist möglich, eine Umgebung W von 1 in G und eine Umgebung U_0 eines beliebigen ξ_0 in M anzugeben, so daß W und U_0 homöomorph auf n bzw. m Parameter ($m = 0, 1, \cdots, n$*[27]*) bezogen werden können (die gewisse Umgebungen von $0, \cdots, 0$ im n- bzw. $n-l$-dimensionalen [reellen] euklidischen Raume durchlaufen), so daß sowohl das Kompositionsgesetz von G, als auch das Transformationsgesetz von M durch G in diesen Parametern analytisch ausfällt.*

4. Wir lassen jetzt die Annahme der Kompaktheit von G und seiner Transitivität in M fallen. Dagegen verschärfen wir die übrigen Annahmen: M sei in einer geeigneten Umgebung eines jeden seiner Punkte homöomorph auf m ($= 0, 1, \cdots, n$) Parameter beziehbar, und $F_a(\xi)$ sei als Zweivariablenfunktion von a, ξ stetig[28]. Es soll gezeigt werden, daß es u. U. unmöglich ist, die Parameter für a und ξ so zu wählen, daß $a \cdot b$ und $F_a(\xi)$ analytisch oder auch nur stetig differentiierbar ausfallen.

Es wird, wie in Einl. 1 erwähnt wurde, $n = 1$, $m = 2$ sein, u. zw. sei G die reelle Zahlengerade, d. h. a eine beliebige reelle Zahl, das Kompositionsgesetz die Addition $a + b$. M sei die reelle u, v-Ebene. $\varphi(r)$ sei eine für alle $r > 0$ definierte, stetige (reelle) Funktion, die zu a gehörige Transformation von M sei eine Drehung mit dem Mittelpunkt $0, 0$, aber um einen von r abhängigen Winkel auf jedem Kreise $u^2 + v^2 = r^2$: um $\varphi(r)\, a$. D. h.

$$F_a(u, v) = u \cos\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\, a\} - v \sin\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\, a\},$$
$$u \sin\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\, a\} + v \cos\{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})\, a\}.$$

Durch geeignete Wahl von $\varphi(r)$ werden wir die gewünschten Beispiele gewinnen.

---

[26] Man beachte, daß die Beziehung von M zu Parametern nicht Voraussetzung ist; sie wird vielmehr bewiesen!

[27] m tritt an Stelle des $n - l$ im Beweise.

[28] Im Falle der Kompaktheit und Transitivität wurde beides durch Satz I bewiesen, die a, ξ-Stetigkeit insbesondere dadurch, daß $F_a(\xi)$ sogar analytisch gewählt werden konnte.

Wenn $\varphi(1) = 0$ für alle $r > 0, \leqq r_0$ ($r_0 > 0$, fest) gilt, aber für kein $r > r_0$, so liegt in jeder Umgebung des Punktes ξ_0 gleich $r_0, 0$ ein Gebiet, in dem $F_a(\xi) = \xi$ ist, aber auch ein anderes Gebiet, wo dies nicht gilt. Da eine analytische Funktion ein solches Verhalten nicht zeigen kann, ist eine Parameterwahl, bei der $F_a(\xi)$ analytisch wird, unmöglich. Somit erledigt z. B. $\varphi(r) = \mathrm{Max}\,(0, r - r_0)$ die Annahme der Analytizität.

Etwas schwieriger ist der Fall der stetigen Differentiierbarkeit. Hier schließen wir so, daß wir annehmen, daß in je einer Umgebung von 0 bzw. 0, 0 solche Parameter a' für a und u', v' für u, v eingeführt wurden, daß $a' \cdot b'$ und $F_{a'}(u', v')$ stetig differentiierbar sind, und daraus folgern, daß $\varphi(r)$ gewisse Eigenschaften besitzen muß. Alsdann wählen wir $\varphi(r)$ so, daß es dieselben nicht besitzt, womit auch die Annahme der stetigen Differentiierbarkeit entfällt.

5. Das Kompositionsgesetz für a' heiße $a' \circ b'$, die Abbildung von a auf a' werde durch die ein-eindeutige und stetige Funktion $a = f(a')$ vermittelt. $f(a')$ ist somit monoton (wachsend oder fallend), nach einem Satze von Lebesgue[29] gibt es also Stellen, wo es differentiierbar ist.

$a' \cdot b'$ ist als a'-Funktion differentiierbar, $a' \circ b'^{-1}$ auch; hätte also $a' \circ b'$ für ein $a' = a'_0$ die Ableitung 0, so hätte sie $(a' \circ b') \circ b'^{-1} = a'$ dort auch. Aber dies ist unmöglich, da a' stets die Ableitung 1 hat. Es ist

$$f(a' \circ b') = f(a') + f(b'),$$

sei $f(a')$ für $a' = a'_1$ differentiierbar; da $a' \circ b'$ die a'-Ableitung $\neq 0$ hat, ist auch $f(a')$ für $a' = a'_1 \cdot b'$ differentiierbar. D. h. $f(a')$ ist überall differentiierbar. Dabei ist

$$\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \Big|_{a' = a'_1 \cdot b'} = \frac{\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \Big|_{a' = a'_1}}{\frac{\partial}{\partial a'} (a' \circ b') \Big|_{a' = a'_1}},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \Big|_{a' = \bar{a}'} = \frac{\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \Big|_{a' = a'_1}}{\frac{\partial}{\partial a'} (a' \circ [\bar{a}' \circ a_1'^{-1}]) \Big|_{a' = a'_1}},$$

also $f(a')$ stetig differentiierbar. Da stets $\frac{\partial}{\partial a'} f(a') \neq 0$ ist $\Big($käme $\frac{\partial}{\partial a'} f(a') = 0$ überhaupt vor, so müßte es wegen der obigen Formel immer gelten, d. h. $f(a')$ wäre konstant$\Big)$, ist es auch die Inverse. Wir können daher statt a'

[29] Vgl. z. B. a. a. O. Anm. [12], Satz 7 auf S. 573.

wieder den Parameter a einführen, $F_{a'}(u', v')$ bleibt stetig differentiierbar, d. h. wir können annehmen, daß von vornherein $a' = a$ war.

Wenn die zwei Komponenten von $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u', v')$[30] für $a = \bar{a}$ und ein gewisses u', v' verschwinden, so müssen sie es wegen

$$F_{a+b}(u', v') = F_b(F_a(u', v'))$$

auch für $a = \bar{a} + b$ tun, d. h. für alle a. Dann ist $F_a(u', v')$ von a unabhängig, was $u, v = 0, 0$, also $u', v' = 0, 0$ nach sich zieht. Für $u', v' \neq 0, 0$ sind also die zwei Komponenten von $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u', v')$ stets $\neq 0, 0$. $\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ ist in u, v, also auch in u', v' stetig; wir nehmen an, daß es stets > 0 ist, dann ist auch $\frac{2\pi}{\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})}$ in u', v' stetig. Da aber identisch

$$F_{\frac{2\pi}{\varphi(\sqrt{u^2+v^2})}}(u', v') = u', v'$$

gilt, so folgt aus dem soeben festgestellten Verhalten von $\frac{\partial}{\partial a} F_a(u, v)$, daß $\frac{2\pi}{\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})}$ für $u', v' \neq 0, 0$ (nach u', v') stetig differentiierbar ist, also $\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ auch.

Dem Kreis $u^2 + v^2 = r^2$ ($r > 0, < r_1$, wobei $u^2 + v^2 < r_1^2$ eine Umgebung von 0, 0 ist, in der die Parameterdarstellung noch gilt) entspricht in der u', v'-Ebene eine Jordankurve J_r. Aus den Lagen der Kreise folgt, daß 0, 0 und jedes J_s mit $s < r$ im Inneren von J_r liegt. $\varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ ist auf J_r konstant.

Sei C das Maximum von $\frac{\partial}{\partial u'} \varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ und $\frac{\partial}{\partial v'} \varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ im Inneren von $J_{\frac{r_1}{2}}$. Sei weiter $0 < r_2 < r_3 < \frac{r_1}{2}$, r_2, r_3 fest. Wir wählen ein u'_2, v'_2 auf J_{r_2} und ein u'_3, v'_3 auf J_{r_3}, ihre Verbindungsstrecke sei S. Seien nun $\nu - 1$ beliebige Zahlen $\varrho_1, \cdots, \varrho_{\nu-1}$ mit $r_2 < \varrho_1 < \cdots < \varrho_{\nu-1} < r_3$ gegeben, wir setzen noch $\varrho_0 = r_2$, $\varrho_\nu = r_3$. S schneidet jedes ϱ_μ ($\mu = 1, \cdots, \nu - 1$), etwa in $u'^{(\mu)}, v'^{(\mu)}$, u. zw. können wir $u^{(\mu)}, v^{(\mu)}$ zwischen $u^{(\mu-1)}, v^{(\mu-1)}$ und u_3, v_3 wählen, was für alle $\mu = 2, 3, \cdots, \nu$ geschehen soll. Naturgemäß

$$u'^{(0)}, v'^{(0)} = u'_2, v'_2, \qquad u'^{(\nu)}, v'^{(\nu)} = u'_3, v'_3.$$

[30] $F_a(u', v')$ ist ein Punkt der u', v'-Ebene, besteht also aus zwei reellen Funktionen.

Dann liegen die $u^{(\mu)}, v^{(\mu)}$ in der Reihenfolge ihrer μ auf S, und es ist:

$$|\varphi(\varrho_\mu) - \varphi(\varrho_{\mu-1})| \leqq 2\,C \cdot \text{Entf.}\,(u'^{(\mu)}, v'^{(\mu)}; u'^{(\mu-1)}, v'^{(\mu-1)}),$$

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\varrho_\mu) - \varphi(\varrho_{\mu-1})| \leqq 2\,C \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu} \text{Entf.}\,(u'^{(\mu)}, v'^{(\mu)}; u'^{(\mu-1)}, v'^{(\mu-1)})$$

$$= 2\,C \cdot \text{Entf.}\,(u'^{(\nu)}, v'^{(\nu)}; u'^{(0)}, v'^{(0)}) = C \cdot \text{Entf.}\,(u_3', v_3'; u_2', v_2').$$

Wir haben also, unter der Voraussetzung, daß für alle $r > 0$, $< r_1$ $\varphi(r) > 0$ ist, folgendes gezeigt: Es gibt zwei r_2, r_3, $0 < r_2 < r_3 < \frac{r_1}{2}$, so daß für alle Systeme $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_\nu$ mit $r_2 = \varrho_0 < \varrho_1 < \cdots < \varrho_{\nu-1} < \varrho_\nu = r_3$

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\varrho_\mu) - \varphi(\varrho_{\mu-1})|$$

unterhalb einer festen (d. h. nur von r_2, r_3 abhängigen) Schranke bleibt. Wenn wir also ein stetiges $\varphi(r)$ angeben können, derart, daß stets $\varphi(r) > 0$ ist und für jedes $r_2 < r_3$ die obere Grenze der

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} |\varphi(\varrho_\mu) - \varphi(\varrho_{\mu-1})| \quad (r_2 = \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{\nu-1} < \varrho_\nu = r_3)$$

gleich ∞ ist, so sind wir am Ziele. D. h. es wird ein stetiges positives $\varphi(r)$ gesucht, das in jedem Intervalle von unendlicher Variation ist, und Beispiele solcher $\varphi(r)$ sind bekannt[31].

[31] Vgl. z. B. a. a. O. Anm. [12], S. 590–594; man bilde mit der dort konstruierten, „nirgends differentiierbaren Funktion von Weierstraß" $w(x)$ $\varphi(r) = 1 + w(r)$. Zur Unendlichkeit der Variation vgl. S. 590 ebendort.

PRINCETON, N. J.

TRIP REPORT

January 10-14, 1960

This period was spent en route to and from Princeton, New Jersey and at the Institute for Advanced Study.

While there I did the following:

(1) Prepared for the printer Volumes IV, V, VI of the Collected Works of John von Neumann.

(2) Rewrote the Preface.

(3) Wrote a number of letters of transmittal.

(4) Checked the Bibliography.

A. H. Taub

A. H. Taub

January 14, 1960

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

PRINCETON, NEW JERSEY

January 13, 1960

Captain I. R. Maxwell
Pergamon Press Limited
4, Fitzroy Square
London W.1, England

Dear Captain Maxwell:

I am enclosing herewith the following items relevant to the Collected Works of John von Neumann:

1) A photograph of John von Neumann to be used as a frontispiece in each volume.

2) An acknowledgement written by Klara von Neumann-Eckart.

3) A preface written by me.

4) A Bibliography of von Neumann's scientific works.

COPY

All four items, together with Tables of Contents of all volumes, are to be printed in each volume. I would suggest that the Table of Contents of a particular volume in which this material finds itself be emphasized in some manner. This could be done, for example, by duplicating the Table of Contents of the particular volume in question. Other more dramatic or interesting schemes may suggest themselves to you or your staff. I would appreciate having such suggestions.

With the mailing of this material I feel that in first approximation I have completed the first phase of my job as Editor of the Collected Works of John von Neumann. The second phase, namely, the one of discussing plans for the production of the six volumes, is highly dependent on you and your organization. I hope that this will go quickly.

We have already discussed by phone and letter a number of suggestions and comments that I have made. These have been accepted by you and I hope that your production people find them useful.

I shall look forward to learning your plans for printing and distributing these books. I have not yet received my dummy copy of one of the books. I am anxious to see this dummy copy.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg
Enclosures
cc: KvN-Eckart
Dr. Oppenheimer

PREFACE

The following pages contain a reprinting of all the articles published by John von Neumann, some of his reports to government agencies and to other organizations, and reviews of unpublished manuscripts found in his files. The published papers, especially the earlier ones, are given herein in essentially chronological order. Exceptions in this ordering have been made in order that his work in certain fields could be presented as a whole.

A number of reports written by von Neumann could not be included in this collection because they are still classified. Others were not included because they are essentially lecture notes which contain well-known material.

Shortly after von Neumann's death a number of people devoted much time to studying the von Neumann files. One result of this study was the publication of a posthumous paper by von Neumann:

> Non-isomorphism of Certain Continuous Rings (with an introduction by I. Kaplansky). Ann. Math. 67 (1958), pp. 485-496.

It also became apparent that there were a number of manuscripts which for one reason or another were not suitable for publication but whose existence should be made known to the scientific public, because these manuscripts contained partial results or techniques of wide interest. It was decided to have such manuscripts placed in the library of the Institute for Advanced Study and have reviews of their contents included in this collection of von Neumann's work.*

The Bibliography given at the end of this Preface contains a listing of von Neumann's scientific works, including his books and mimeographed lecture notes. There is noted in this listing the volume and page number where any particular item in the bibliography, which is included in this collection, may be found. A brief resume of the contents of the various volumes follows.

---

*Additional material, consisting of unfinished manuscripts, notes and some of von Neumann's scientific correspondence, is also on file in this library.

Volume I - Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics - starts with the article entitled, "The Mathematician," first published in 1947, in which von Neumann discusses the nature of the intellectual effort in mathematics. The volume then continues with early papers on the subjects given in the title.

Volume II - Operators, Ergodic Theory and Almost Periodic Functions in a Group - includes papers on the subjects listed in the title.

Volume III - Rings of Operators - contains his work on, and closely related to, the theory of the rings of operators.

Volume IV - Continuous Geometry and other topics - includes the papers on continuous geometry, as well as papers written on a variety of mathematical topics. Also included in this volume are four papers on statistics, and reviews of a number of manuscripts found in his files.

Volume V - Design of Computers, Theory of Automata, and Numerical Analysis - is devoted to von Neumann's work in these topics.

Volume VI - Theory of Games, Astrophysics, Hydrodynamics and Meteorology. Papers on these topics, as well as a number of articles based on speeches delivered by von Neumann, are included in this volume.

The editor acknowledges the debt he owes for the comments made by the people who studied the von Neumann files, and is particularly indebted for the remarks of J. Bigelow, J. G. Charney, C. Eckart, P. Halmos, S. Kakutani, F. J. Murray, E. Teller and E. Wigner.

He gratefully acknowledges the helpful advice given by S. Bochner, K. Gödel, Deane Montgomery and S. Ulam. Special thanks are due to the persons who evaluated many manuscripts and reviewed some: J. Bardeen, G. Birkhoff, H. H. Goldstine, I. Halperin, G. A. Hunt, I. Kaplansky, H. W. Kuhn, G. W. Mackey, O. Morgenstern and A. W. Tucker.

The Office of Naval Research gave financial support to the work of organizing the von Neumann files and evaluating manuscripts. Without this support the preparation of this collection would have been seriously hampered.

The editor is grateful to the Institute for Advanced Study for making its facilities available to him and for providing many essential and helpful services. It is his pleasure to acknowledge the debt he owes to Mrs. Elizabeth Gorman, who was formerly secretary to Professor von Neumann, for her extremely valuable and unstintingly given assistance.

A final and most important acknowledgement must be made. This is to the untiring efforts of Klara von Neumann-Eckart, and her help in innumerable ways in making available to the scientific community the various contributions of John von Neumann.

A. H. Taub

Items 1-19 and 21-25 in IAS Library

• - published in v. 5 of von Neumann Collected Works, Macmillan and Co., 1963

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, ELECTRONIC COMPUTER PROJECT

List of Reports Issued during the Years 1946 - 1957

1• Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument, by Burks, Goldstine, and von Neumann. 28 June 1946.

2• Solution of Linear Systems of High Order - Bargmann, Montgomery, von Neumann. October 1946.

3. Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument, by Bigelow, Pomerene, Slutz, and Ware. 1 January 1947.

4• Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument - Goldstine and von Neumann. Part II, Volume I, 1 April 1947.

5. Second Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument - Bigelow, Hildebrandt, Pomerene, Snyder, Slutz, and Ware. 1 July 1947.

6• Numerical Inverting of Matrices of High Order. I. - Goldstine and von Neumann. November 1947 (Bull. Am. Math. Soc. 53, 11).

7. Third Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument - Bigelow, Hildebrandt, Pomerene, Rosenberg, Slutz, and Ware. 1 January 1948.

8• Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument - Goldstine and von Neumann. Part II, Volume II. 15 April 1948.

9. First Progress Report on a Multi-Channel Magnetic Drum Inner Memory for Use in Electronic Digital Computing Instruments - Bigelow, Panagos, Rubinoff, and Ware. 1 July 1948.

10. Fourth Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument - Bigelow, Hildebrandt, Panagos, Pomerene, Rosenberg, Rubinoff, Slutz, and Ware. 1 July 1948.

11• Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument - Goldstine and von Neumann. Part II, Volume III. 16 August 1948.

12. Fifth Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument - Bigelow, Goldstine, Melville, Panagos, Pomerene, Rosenberg, Rubinoff, and Ware. 1 January 1949.

13• Numerical Inverting of Matrices of High Order. II. - Goldstine and von Neumann. April 1951 (Proc. Am. Math. Soc., 2, 2).

14. Sixth Interim Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument - C. V. L. Smith. September 1951.

15. Final Progress Report on the Physical Realization of an Electronic Computing Instrument. Goldstine, Pomerene, and C. V. L. Smith. January 1954.

16. Final Report on Contract DA-36-034-ORD-1023, by Staff, Electronic Computer Project. April 1954. (Is identical with Report on Contract N-7-ONR-388, T.O. 1, April 1954.)

17. Final Report on Contract DA-36-034-ORD-1330, by Staff, Electronic Computer Project. December 1954.

18. Final Report on Contract No. DA-36-034-ORD-1646 (Part I - Engineering, Part II - Computer Use), by Staff, Electronic Computer Project, December 1956.

19. Final Report on Contract No. Nonr 1358(03), by Hans J. Maehly, 31 July 1957.

20. Final Report on Contract No. Nonr 1358(04), by Hans J. Maehly, 31 August 1957. [NOT IAS - try P.U. (Research and Project Administration).]

Technical Reports

21. Fast Carry Logic for Digital Computers, by B. Gilchrist, J. H. Pomerene and S. Y. Wong. Tech. Report No. 55-01, July 1955.

22. Automatic Network Analysis With a Digital Computational System, by M. Kochen and S. Y. Wong. Tech. Report 55-02, August 1955.

23. A Method for Finding the General Solution to an Arbitrary Non-Singular System of Linear Equations Involving $n^3/2$ Multiplications, by J. Paul Roth. Tech. Report 56-01, January 1956.

24. Algebraical Topological Methods for the Synthesis of Switching Circuits in n Variables, by J. Paul Roth. Tech. Report 56-02, April 1956.

25. An Algebraic Topological Approach to Kron's Method I, by J. Paul Roth. Tech. Report No. 56-03, June 1956.

First Interim Progress Report on Rational Approximations, by Hans J. Maehly, Project No. 044-196, dated 23 June 1958--available through J. Lucker, Firestone Library. Approximate cost: Xerox $5.00; Microfilm $2.50.

ACKNOWLEDGEMENT

The publication of the six volumes of the collected works of John von Neumann represents an imposing burden of work, great and broad knowledge, and very time-consuming research. It would hardly have been possible to make this collection available to the scientific community, and surely not in so short a time, had it not been for the welcome fact that Dr. A. H. Taub volunteered to undertake the vast labor of assembling and editing the manuscript. His great dedication and the completely unselfish and intensive concentration with which he handled the task have made this publication possible. I believe that he was motivated to take on this great task by the memory of a close personal friend, a man whom he admired for his scientific work. I would like to be permitted to express my deepest gratitude to A. H. Taub, not only in my own name, but also in the name of the entire scientific community who will benefit by his wonderful work. I know that many colleagues of John von Neumann share my gratitude, and Dr. Oppenheimer of the Institute for Advanced Study, where my late husband spent so many fruitful years, has asked to be associated with this acknowledgement of a great debt to the Editor.

Klara von Neumann-Eckart

December 7, 1960

Professor Arthur W. Burks
Digital Computer Laboratory
University of Illinois
Urbana, Illinois

Dear Professor Burks:

Mrs. von Neumann-Eckart is here at the present time and because I feel that she has a more intimate knowledge of your questions, I have asked her to reply to your letter of November 30th. It is enclosed.

I shall be happy to assist you in any way I can another time.

Sincerely yours,

Elizabeth S. Gorman

December 7, 1960

Professor Arthur W. Burks
Digital Computer Laboratory
University of Illinois
Urbana, Illinois

Dear Professor Burks:

Since I happen to be at the moment in Princeton and Mrs. Gorman got in touch with me concerning the questions in your letter, I will try to answer as many of them as I can do handily.

You perhaps may know that I have been working closely with Professor Taub for the last three years on collecting all of Johnny's works, and also on my own have been working over his private papers and correspondence. I shall refer to this later.

(1) In reference to the December 1949 lectures given at the University of Illinois, I have in my possession copies of these lecture notes and correspondence between the University of Illinois and Johnny extending from about early 1951 up to the middle of 1953. From this correspondence and also from my own recollections, it is peffectly clear that Johnny had never corrected those lectures notes. As a matter of fact, it was in lieu of correcting the lecture notes that he had agreed to write a book to be published by the University of Illinois and these are the various fragmentary chapters that you now have with you. In other words, I am perfectly certain that there is no copy of the lecture notes with any corrections by Johnny or anybody else.

(2) There are some handwritten footnotes here with the long manuscript which we have had photostated and which are enclosed. As far as I know there is nothing written on the other chapters that he had planned to write, and if there are any notes they will be scattered among his other papers. I shall come back to this again later.

(3) As far as dating the last manuscript is concerned, I am quite positive that it was started by him in late September 1952 and that he continued working on it until sometime in mid late 1953. This is as close as we can come to dating it.

(4) Concerning your question of the lectures June 5, 7, 14, 1948 which Johnny presumably delivered before Goldstine, Bigelow and Taub, there are no notes on these to the best of my knowledge. Knowing Johnny's method of working it would be very unlikely that under these extremely informal circumstances he would have made any notes except on the blackboard.

(5) Again, as far as I know, there are no notes of any size on the "Continuous Model." There might be perhaps some reference in some of his correspondence but this I could not answer offhand.

(6) All of his correspondence, including letters with some scientific discussions are at the moment at my home at 347 Vista de la Playa, La Jolla, where I have filed them in some order in several steel drawers. These drawers are locked and are not available for inspection until my return there. On the other hand, I should be more than delighted to let you look at them, at least those that might be of any interest to you, should you be able to make a trip out after the end of January when I shall be back there and will be very glad to be of any help that I possibly can.

There are also a number of manuscripts listed in the O. N R. Report that Professor Taub compiled which are available for inspection, at the Institute for Advanced Study in care of Mrs. Gorman, to those who are interested. You might at your convenience check with Professor Taub who I am sure has a listing of these papers and also an intimate knowledge of them, whether there might be anything among them that could be of some help to you.

(7) The word "stablishing" on page 6 of Chapter 1 is a typographical error. On the original copy we have found a correction with the letter "e" put in front of it so the word is "establishing." As far as other nonstandard spelling is concerned, the two examples that you have given--kinematics spelled with a "c" and spatial with a "c"--is simply due to the fact that Johnny often used the German way of Latin spelling which would put a "c" in both places instead of the "k" and "t". I would suggest that you should feel free to put these back into the standard form of English spelling and consider it a simple lapsus lingae.

May I add for my own self, that I certainly appreciate the great difficulty and the hard work that you are facing, and may I thank you personally for making the effort of getting this book out in some intelligible form.

Sincerely yours,

Klara von Neumann-Eckart

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DIGITAL COMPUTER LABORATORY
URBANA, ILLINOIS

November 30, 1960

Mrs. Elizabeth Gorman
School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Dear Mrs. Gorman:

As you may perhaps know, Dr. Abraham Taub has assigned me the responsibility of editing von Neumann's unpublished manuscripts on the theory of automata. I understand that you were von Neumann's secretary and that you still have his files. There are a number of questions on which you could be of help to me.

My task is to edit two manuscripts. In December of 1949, Johnny delivered five lectures at the University of Illinois. These were recorded on tape and then transcribed by a secretary who is not acquainted with the technical subject matter. As a consequence, a good part of the transcribed material is unintelligible. Do you know if von Neumann had in his files an annotated copy of this transcription which would be of help to me when I edit it? Taub gave me a carbon copy of this transcription so presumably the original is in your files. The second manuscript I have is the incomplete manuscript entitled, "The Theory of Automata: Construction, Reproduction, Homogeneity". This consists of two mimeographed or ozalid chapters plus a photostatic copy of an incomplete third chapter. It would be of help to me in editing this to have any auxiliary materials that are available. There are references to footnotes so there must be an indication of what these footnotes ~~where~~ were to contain somewhere. Are there any notes available which indicate what von Neumann was planning to put in the unfinished portion of chapter 3? Originally there were to be 4 chapters; as the manuscript stands the contents of the original chapter 2 was to include the contents of the present chapter 3. This means that there are two more chapters which von Neumann planned to write. Are there any notes about these?

This last manuscript is extremely important, and hence it is desirable to date it as accurately as possible. There must be some letters in his file which would enable us to do this, and perhaps your memory will be of assistance here.

1952-53

On June 5, 7, 14, and perhaps on other days of 1948, Johnny delivered some lectures on an early model for self-reproduction. Goldstine, Bigelow, and Taub constituted the audience. Are there any notes in von Neumann's file of the content of these lectures?

In the long manuscript and elsewhere, von Neumann refers to a continuous model which he was going to discuss after he had completed chapter 3 of the manuscript. Are there any notes about this model in the file?

It is very likely that there is in his files some correspondence which would help answer the questions I raised above. Is there any way of locating this correspondence?

There are a number of minor points in the long manuscript where it would be nice to be entirely accurate. For example, on page 6, the word stablishing (typo. error) occurs. Would you know for example whether this was intentional or whether it was a typographical error. There are a number of places where von Neumann uses non-standard spelling. For example, on page 6 of chapter 2 of this (German version of Eng. spelling manuscript he spells kinematics with a c rather than a k, and on page 8 - use whatever you want.) he spells spatial with a c instead of a t.

I realize that the questions I am asking you are not easy to answer, However, I feel that this manuscript is an extremely important contribution to science, and that it is desirable that I have all the information possible in order to edit it well. I will appreciate very much any assistance you can give me in this matter.

Sincerely yours,

Arthur W. Burks

Arthur W. Burks

AWB/js

November 10, 1959

Dear Dr. Oppenheimer:

Enclosed you will find copies of correspondence between Dr. Stakgold of O. N. R. and myself. My letter to him is a status report on the work on the von Neumann files. This material is being sent to you for your information.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg
Enclosures

November 10, 1959

Dr. Ivar Stakgold, Head
Mathematics Branch
Office of Naval Research
Department of the Navy
Washington 25, D. C.

Ref: ONR:432:IS:lgb, NR 043-201

Dear Dr. Stakgold:

This is in response to your request of October 30, 1959 for material related to Contract NR 043-201, the funds of which were used to support work on the scientific material in the late John von Neumann's files.

The final report on this contract is being prepared. It is to consist of a very short description of the work done and five attachments. Two copies of the report, minus the attachments, are included herewith. The completion of the attachments awaits the receipt of some reviews. I have been assured by the reviewers involved that they will complete their reviews soon. Eighteen reviews will have been prepared under the contract.

It is planned to publish these reviews in the collected works of John von Neumann and to deposit the manuscripts reviewed in the library of the Institute for Advanced Study.

Progress is being made in regard to the publication of the von Neumann collected works, a project related to but distinct from the one being reported on herein. Three of the six volumes of the collected works are ready for the printer. It is expected that the remaining volumes will be ready before the first of the year.

I hope that this letter and its enclosure provides the information you requested.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg
cc: Mr. Oppenheimer

Distribution List for Final
Report to ONR

10 - ONR
1 - KvN-Eckart
2 - A. H. Taub
1 - R. Oppenheimer
1 - Miss Sachs (library)
1 - J. Bardeen
1 - G. Birkhoff
1 - H. H. Goldstine
1 - I. Halperin
1 - G. Hunt
1 - I. Kaplansky
1 - H. W. Kuhn
1 - G. W. Mackey
1 - O. Morgenstern
~~1 - Marina v.N. Whitman~~
1 - A.W. Tucker
2 - M.C. Morgan for
Mr. Levy at Forrestal

THE SCIENTIFIC FILES OF JOHN VON NEUMANN

Report on Contract Nonr 1358(06)

November 1959

1. The funds of the subject contract have been used to support work on the scientific material in the files left by John von Neumann. This material is quite varied in nature, ranging from rough notes to almost completed, to completed unpublished manuscripts.

2. Experts in the subject matter of the various manuscripts were asked to review them with a view toward their publication in their entirety. If they were deemed unsuitable for such publication, they were to be judged as to their suitability for having a short review published. A review consists of a description of the manuscript given in sufficient detail so that a reader could determine whether he was interested enough to take steps to see the full manuscript, which is deposited in the library of the Institute for Advanced Study. The publication of the reviews would enable the scientific public at large to benefit from the ideas propounded by, and the techniques used by von Neumann in papers he did not finish or publish.

3. The manuscripts which were reviewed and material related to manuscripts which are to be published for the first time in the collected works have been gathered into File A. Attachment A lists the items in this file and contains a description of each item in the file. The description consists either of a copy of the review of the manuscript, if one has been written, or a short listing of the contents of the folder containing the item in question.

4. It should be pointed out that before funds from the subject contract were made available, various mathematicians devoted quite a bit of time to studying the von Neumann files. One result of this work has been the publication of a posthumous paper by von Neumann:

> Non-isomorphism of Certain Continuous Rings (with an introduction by I. Kaplansky). Ann. Math. 67, No. 3 (1958), pp. 485-496.

5. Two papers in which von Neumann was a co-author have appeared since his death. These are:

> The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices (with H. H. Goldstine and F. J. Murray). J. Assoc. for Computing Machinery 6, No. 1 (1959), pp. 59-96.

A Study of a Numerical Solution to a Two-Dimensional Hydrodynamical Problem (with A. Blair, N. Metropolis, A. H. Taub and M. Tsingou). MTAC (in press).

6. The files contained many manuscripts related to lecture courses at Princeton University, The Institute for Advanced Study and to lectures given before the American Mathematical Society. Some of these lectures have been published in mimeograph form. The lecture notes have been gathered into File B. Attachment B lists the lecture notes and material related to them in File B.

7. A number of unpublishable, partially completed manuscripts were found and gathered into File C. These are listed and described in Attachment C.

8. Attachment D contains a listing of rough notes not in manuscript form, written by von Neumann on various scientific subjects. The notes themselves are in a file called File D.

9. Attachment E consists of a bibliography of books, papers and reports written by J. von Neumann. Government reports which are still classified are omitted from this bibliography.

A. H. Taub
Principal Investigator

September 8, 1959

Captain I. R. Maxwell
Pergamon Press Limited
4, Fitzroy Square
London, W.1, England

Dear Captain Maxwell:

We were all very disappointed to hear that you would not be able to meet in Princeton and discuss the von Neumann collected works. Mrs. Eckart, Dr. Oppenheimer and myself met and discussed a number of topics connected with these works. The minutes of our meeting are enclosed. I hope you will pay special attention to points 4 and 10.

I had planned to give you draft copies of the table of contents and the preface at the meeting in Princeton. I shall work on these further and hope to send them to you when I hear your response to the minutes of our meeting.

In view of your message which arrived this morning announcing your new plans, we wonder whether these plans are consistent with your giving the great personal attention that you have given to the publication of the von Neumann collected works. Will you, indeed, be able to continue this?

I am looking forward very much to hearing from you.

Sincerely yours,

A. H. Taub
Digital Computer Laboratory
University of Illinois
Urbana, Illinois

AHT:esg
Enclosure
cc: Mr. E. Dews
Mrs. C. Eckart
Dr. R. Oppenheimer

Minutes of Meeting Concerning the von Neumann Collected Works

September 8, 1959

Present: Mrs. Carl Eckart, Dr. R. Oppenheimer and A. H. Taub

1. Status of the Manuscript

A preface has been written, the table of contents of the six volumes has been settled and all the contents but a few reviews have been collected. The preface contains acknowledgements. There will be no honorary editors. A complete bibliography is being prepared which will serve as an index. Complete table of contents and bibliography will appear in each volume.

2. The Method of Production

(a) It is agreed that use of a photographic method of production is to be used on material already printed by letter press. However, extreme care is to be taken to produce a handsome set of volumes with uniformity of margins and appearance of the pages.

(b) Errata are to be given at the beginning of each paper and no corrections in the text are to be made of material reproduced photographically.

(c) Galley proof of a review is to be sent to each reviewer.

3. Copyright Problem.

Pergamon Press is to proceed immediately with obtaining permission to reprint copyright material from the copyright holders.

4. Price

It is felt that in view of waiver of royalties on the part of the von Neumann estate and on the part of the editor, and for other reasons, the price of the set should be kept to a minimum. The price cannot be expected to be less than one cent per page, nor should it go over two cents per page. It is acceptable to all concerned to have a lower price apply to individual members of various scientific societies, and a greater one apply to institutional buyers.

Max price Vol. I $14

5. Dummy Copies

Pergamon Press will send dummy copies to Mrs. Eckart, Dr. Oppenheimer and A. H. Taub for comment as soon as possible.

6. Additional Free Copies

In addition to the free copies provided for in the contract between the von Neumann estate and Pergamon Press, it would be advisable to provide free copies to the Institute for Advanced Study (1 set) and O. N. R. (a number of sets).

7. Time Scale

It is desirable to have the collected works appear as soon as possible. The volumes should appear within one year from the date the manuscript is delivered to Pergamon Press. (The estimated date for this delivery is now October 1, 1959.)

8. Individual Volumes

It is important that the sale of individual volumes will be promoted. The price of these to be one-sixth the price of the set.

9. Promotional Material

As noted in the agreement between Pergamon Press and the von Neumann estate, the wording of promotional material used in announcing these volumes will be subject to approval by Mrs. Eckart and A. H. Taub. They will provide information to Pergamon Press for this material if necessary.

10. There will be a meeting between Mrs. Eckart and A. H. Taub early in October. It is important that Captain Maxwell's comments on these minutes be received before the first of October.

THE LONDON SCHOOL
OF ECONOMICS
AND POLITICAL SCIENCE,
HOUGHTON STREET, ALDWYCH,
LONDON, W.C.2.

Dantzig
Nakatani
Kuhn

7th January 1959

Professor A. H. Taub,
Digital Computer Laboratory,
University of Illinois,
Urbana, Illinois, U.S.A.

Dear Professor Taub:

One of my New Year's resolutions was to sit down to write out my comments about various pieces of von Neumann's work in which you are interested. To simplify references, and for your convenience, I enclose a reprint of the article Tucker and I did for the Bulletin. Bibliographic references are to the two lists at the end of this paper.

The question raised in your letter of November 18 to George Dantzig is the easiest to answer. The two iterative methods for solving zero-sum two-person games presented in the mimeographed Paper F and the published Paper K, although similar in approach, are different. They derive from different geometric models of the problem. I recall that von Neumann explained the idea behind F to Gale, Tucker, and myself in the summer of 1948. It is too geometrical to make plausible in a letter (a blackboard would be better) but revolves around the manipulation of a hyperplane separating two convex sets. The algebraic description of the method is placed on record in our survey article. On several occasions, von Neumann referred to the general idea behind K; in his mind, it originated with a smooth objective function (the $\psi(x,y,k)$ of our survey article) which has desirable differentiability.

The case for publishing F seems marginal. The style is impenetrable, with hypotheses appearing and disappearing from section to section. I do not believe it stands any chance at all of ever being competitive as a computational method. Even the method of K, which is somewhat awkward, seems better. The main interest of F is historical, since it was the first computational method to be written down. Its primary interest technically is in the acrobatics performed to obtain a rigorous "practical" bound. I recommend that matters be left as they stand, with the record made by our survey article (last paragraph of p. 113 to first paragraph of p. 116).

The third paper (a typescript which came to me by way of Tucker and which starts "1. A number N = 2, 3, ... is given.") poses an unsolved puzzle. It is a partial answer without a question. After considerable thought on this, I give up. My conclusions are these: This is a partial answer to a question that someone put to him sometime about 1949-1950 (his attitude toward the convex hull of the permutation matrices and the general style are weak evidence). He carried out the translation from a combinatorial problem into a classical maximum problem and left it at that. The tricks used in the translation are amusing but not of great importance. Without the original problem, this seems too slight to publish. No one I have asked has ever heard of it.

The last paper (sent to me as a photostat of a hand-written manuscript) has been as fascinating as a good detective story. The enclosure deals with it in considerable detail.

I hope that these comments will be of help to you. I would be very interested to hear how far you have progressed as von Neumann's scientific executor, and what plans you have for publication.

Sincerely yours,

H. W. Kuhn

Harold W. Kuhn

Enc.
cc. Mrs. E. Gorman

Handwritten manuscript, four pages (see your letter of April 3): This note deals with the following theorem (transcribed from the top of the first page).

"Assumptions: Let S be a topological simplex in the N-dimensional Euclidean space E_N. Thus it is a closed, bounded and non-empty subset of E_N. Let S_C be the smallest convex set containing it. Let to every point $p \in S$ correspond a closed, bounded and non-empty set $A(p) \subset S$; let $A_C(p)$ be the smallest convex set containing it. Assume, that if $p_n \to p$, $q_n \to q$, $q_n \in A(p_n)$, then $q \in A(p)$. (Quasi-continuity of $A(p)$.) Assume that a continuous function $F(p)$, defined in all of S_C exists, such that $q \in S_C$ implies $F(g) \in S$, and $q \in A_C(p)$ implies $F(g) \in A(p)$.

Statement: A $p \in S$ with $p \in A(p)$ exists."

Placing and evaluating this paper is not easy. It is not dated, contains no reference to any other work, and does not use the notation of any other von Neumann paper. A connection with Paper B is obvious, but the precise relation is difficult to establish. At first, I believed that the present note clearly followed Paper B, since the theorem above generalizes the theorem found there. I now believe that the note was written before Paper B, for reasons set forth below.

The principal mathematical result of Paper B occurs on p. 80: Let $F : X \to Y$ and $G : Y \to X$ be continuous point-to-set mappings defined on X and Y, non-empty compact convex subsets of the affine spaces A^m and A^n, and taking as values compact convex subsets of Y and X, respectively. Then there exist x^o and y^o such that $(x^o,y^o)\in G(y^o)\times F(x^o)$. This theorem has become known as the Kakutani fixed-point theorem, since he published and proved the following formulation (in Paper 7): Let F(x) be a continuous point-to-set mapping defined on X, a non-empty compact convex subset of A^m, and taking as values compact convex subsets of X. Then there exists an x^o such that $x^o\in F(x^o)$. This attribution to Kakutani is somewhat unjustified since his theorem follows from von Neumann's by taking $Y = X$ and $G(y) = y$ for all $y\in Y$. However, the formulation was first published by Kakutani and exists nowhere in von Neumann's published work. As a statement, it emphasizes the nature of the theorem as a generalization of the Brouwer fixed-point theorem. As von Neumann wrote in D (footnote, page 154, second edition), the connection with the Brouwer fixed-point theorem "was further clarified and the proof simplified by S. Kakutani". Finally, it should be pointed out that von Neumann stated the 1-dimensional case of the theorem explicitly in fixed-point form in his 1928 paper (A, pp. 310-311).

In the present note, the Kakutani formulation appears as Application 1.1, page 3. To the casual reader, this might suggest that this was written after Kakutani's paper. However, there is no reference to Kakutani and my observations above convince me that it is plausible that the transition between the two formulations is so simple and natural that von Neumann had it independently of and earlier than Kakutani.

Again, to the casual reader, since the theorem of the present note is a generalization of the von Neumann-Kakutani theorem, it might appear that it was written after B. However, after some thought, it is obvious that the present theorem is an immediate consequence of the von Neumann-Kakutani theorem. (Proof. Under the assumptions of the note, $A_C(F(p))$ is a continuous point-to-set mapping defined on S_C, a non-empty compact convex subset of E_N and takes as values compact convex subsets of S_C. Hence there exists a q such that $q \in A_C(F(q))$. Let $p = F(q)$. Then $q \in A_C(p)$ implies $p = F(q) \in A(p)$ and the theorem is proved.)

I believe that it is likely that von Neumann would have noticed this simple argument, which strips the theorem of its apparent generality. In his final remark of the hand-written note, he observes that the Application 2 needs only the case of convex S and A(p)'s and that the proof is simplified thereby. The proof, thus simplified, resembles the proof given in B quite closely.

A final bit of evidence that this is early von Neumann is provided by the grammatical errors: "than" for "then", "ist" for "is", "is" for "its", etc., etc.

Summarizing, this note would have a small amount of historical importance if we could date it before B. It has no mathematical interest since it contains nothing not in B. I would advise against any efforts to publish it.

Dantzig

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DIGITAL COMPUTER LABORATORY
URBANA, ILLINOIS

November 18, 1958

Dr. George B. Dantzig
The Rand Corporation
1700 Main Street
Santa Monica, California

Dear Dr. Dantzig:

Thank you for your letter of November 11, 1958. I have received a note from Harold Kuhn, who promises to write me from London about some work of von Neumann's on game theory. However, it is my impression that he is looking into matters other than the connection between the two papers I asked you about, namely, the mimeographed paper "A Numerical Method for Determination of the Value and Best Strategies of a Zero-Sum 2-Person Game with Large Number of Strategies" and the published paper "A Numerical Method to Determine Optimum Strategy" which appeared in the Naval Research Quarterly, Vol. 1, No. 2, June (1954), pp. 109-115. I hope very much that he will be in a position to make some comments about the relationships between these two things.

If you have any further comments about the relationships between these two things I would appreciate very much hearing them.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:je
cc: ✓Mrs. E. Gorman
Harold Kuhn

Dantzig

The RAND Corporation
1700 Main Street
Santa Monica, California

November 11, 1958 L-21233

Professor A. H. Taub
Digital Computer Laboratory
University of Illinois
168 Engineering Research Laboratory
Urbana, Illinois

Dear Professor Taub:

This is in reference to the letter of October 16, 1958, from your secretary, Mrs. Gorman, and your earlier letter of April 8, 1958, in reference to a mimeographed paper of John von Neumann, ''A Numerical Method for Determination of the Value and Best Strategies of a Zero-Sum 2-Person Game with Large Number of Strategies.'' I am not certain whether this is the same as ''A Numerical Method to Determine Optimum Strategy,'' that appeared in the Naval Research Quarterly, Vol. 1, No. 2, June (1954), pp. 109-115. However, I think they are similar.

My memory is a little hazy, but at the time of your first letter, I believe I discussed this matter with Harold Kuhn, who promised to contact you on the matter.

Sincerely,

George B. Dantzig

GBD:eb
cc: Mrs. Gorman

Dantzig

April 8, 1958

Dr. George B. Dantzig
Rand Corporation
1700 Main Street
Santa Monica, California

Dear Dr. Dantzig:

I have been concerned with preparing the material left by the late John von Neumann for publication. Among his papers I found a mimeographed paper entitled, "A Numerical Method for Determination of the Value and the Best Strategies of a 0-Sum, 2-Person Game with Large Numbers of Strategies." I also found some correspondence going back to 1948 between yourself and Professor von Neumann. Can you tell me whether this paper has ever been published and, if so, is it, or did it get published under the title, "A numerical method to determine optimum strategy," in the Naval Res. Logistics Quarterly, Vol. 1, No. 2, June (1954), pp. 109-115. If the paper was not reworked and published under this form, do you have any suggestions or comments as to what should be done with this manuscript?

III a. # 34

I would very much appreciate hearing from you on this matter.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg

Kakutani
Kuhn

April 3, 1958

Professor H. W. Kuhn
Department of Mathematics
Bryn Mawr College
Bryn Mawr, Pennsylvania

Dear Professor Kuhn:

I have some responsibility connected with the scientific papers of the late Professor von Neumann. The enclosed photostat is a copy of a note found in his files and is presumably a generalization of the theorem he had previously usedd in game theory. I would appreciate any comments and suggestions you may have concerning the disposition of this work.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg
Enclosure

April 3, 1958

Professor S. Kakutani
Department of Mathematics
Yale University
New Haven 11, Conn.

Dear Kakutani:

The enclosed photostat is a copy of a note found in von Neumann's files. This seems to be a generalization of the theorem that you wrote about in the Duke Journal in 1941. It, too, presumably has applications to the theory of games. I wonder if you would be kind enough to give me your suggestions as to what should be done with this theorem. For example, should it be written up and published?

I hope you will forgive me for troubling you about this but I would very much appreciate any help you can give me.

With very best regards,

A. H. Taub

AHT:esg
Enclosure

P.S. I shall be back in Urbana in a few days and can be reached there. AHT

Excerpt from a letter from Mrs. von Neumann-Eckhart to RO, 11/13/58

Your prediction proved to be completely correct. About ten days ago, Captain Maxwell appeared here and, without any further argument, signed the contract for the publication of Johnny's COLLECTA. This means now that we can go ahead in an orderly fashion with out dealings with him, and shelves at least one problem. ~~I~~ just thought that you might want to be informed about this matter.

Machta

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DIGITAL COMPUTER LABORATORY
URBANA, ILLINOIS

November 11, 1958

Dr. Lester Machta, Chief
Special Projects Section
U. S. Weather Bureau
Washington 25, D. C.

Re: R-3.7

Dear Dr. Machta:

Thank you very much for your letter of October 20th which arrived when I was away from Urbana. I am not certain as to what the ultimate disposition will be of the manuscript by von Neumann that you returned with that letter. However, there are two possible things to be done with it. One is to incorporate it as it stands together with some explanatory material in the collected works. The other would be to publish a short review of this work and make the work itself available to qualified scientists. Both types of things are being done with the manuscripts left by von Neumann.

In any case, it would be most helpful to me if you would provide me with an introductory paragraph describing the reasons for which the work was done and the ultimate use to which it was put. I hope that it is not asking too much to make this request of you in view of the uncertainty of the ultimate disposition of this work. Thank you very much for your trouble.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:je

cc: Mrs. E. Gorman
Institute for Advanced Study

Machta

October 20, 1958

R-3.7

Professor A. H. Taub
Digital Computer Laboratory
University of Illinois
Urbana, Illinois

Dear Professor Taub:

The work of Professor von Neumann mentioned in the letters from Mrs. Gorman on February 10, 1958 and October 16, 1958 was undertaken for the Department of Defense in connection with a very special project with which I was connected. I feel that the material can and should be published. However, does the text as written make sufficient sense to even a well qualified mathematician to be useful? I suspect not. For this reason, it might be desirable to provide an introductory paragraph explaining the physical problem which the mathematics solves.

If you feel that this work is sufficiently interesting to include in Professor von Neumann's publications, would you let me know whether such an introductory paragraph might be helpful and I am sure that I can assist in one way or another.

Sincerely yours,

/S/ Lester Machta

Lester Machta, Chief
Special Projects Section

Encl.

cc: Mrs. Gorman

Machta

February 10, 1958

Dr. Lester Machta
U. S. Weather Bureau
24th and M Streets, NW
Washington 25, D. C.

Dear Dr. Machta:

At the request of Professor A. H. Taub, who is working over the scientific papers of the late John von Neumann with a view to organizing them for publication, I enclose a paper which apparently you and Professor von Neumann worked on together. This paper is referred to in a letter from him to you dated January 31, 1952. We would appreciate knowing whether this was ever published and, if so, where? If not, do you have any recommendations as to its disposition?

Thank you very much for your trouble in this matter. Will you please return the enclosed manuscript with your reply.

Yours sincerely,

(Mrs.) Elizabeth S. Gorman
Secretary

cc: A.H. Taub
Enclosure

Maybe connected with theory of
games. Ask Morgenstern.

S. Kakutani

Make photostat
and give to
A W Tucker
to have studied
for possible future
disposition

10/28/58

AWTucker called this a.m. He said the paper is now in the hands of Kuhn who is in England for the year. He will write to him immediately, but he "believes Kuhn could not make much out of the fragment and that is their only comment--it does not seem to relate to anything they know about."

SUMMARY

The problem is defined in 1., 2. The integral z is defined in 1., the quantities a_i $(i = 1, \cdots, n)$ and x_i^0 $(i = 1, \cdots, r)$ are introduced in 1., the quantities σ_{ij} and μ_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n;\ i \neq j)$ are introduced in 2.

The solution calls for calculating the quantities c_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$ by (9) and the quantities b_i $(i = 1, \cdots, n)$ by (10), then the quantities w_i $(i = 1, \cdots, n)$ by solving the equation system (37), and finally $\bar{\mu}$ by (38) and $\bar{\sigma}$ by (39).

The result is stated in (Υ) in 6.

- - - - - - - - - - - - - - - -

1. Let S be a surface, $d\omega$ the surface element.

Let x be a continuous function on S, an evaluation of the integral $z = \int x \, d\omega$ is wanted.

Let S be subdivided into n regions A_i $(i = 1, \cdots, n)$, the surface area of A_i being a_i.

Let x_i be the average of x over A_i. Then

(1) $$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i .$$

Let x_i be measured in the area A_i, giving the value x_i^0 -- but this only for the subset $i = 1, \cdots, r$.

2. The following statistical assumptions about the x_i $(i = 1, \cdots, n)$ are being made:

(A) If an x_i is known, while x_j is not known $(i, j = 1, \cdots, n;\ i \neq j)$, then x_j is presumed to be normally distributed, with a mean that is displaced by μ_{ij} against x_i, and a dispersion

σ_{ij}. I.e., the distribution of x_j is controlled by the expression

(2) $$(\sqrt{2\pi}\,\sigma_{ij})^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{-2}(x_i - x_j + \mu_{ij})^2}.$$

(By the nature of things, $\mu_{ji} = -\mu_{ij}$, $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$.)

(B) If x_i has been "observed", and the value x_i^0 has been obtained, x_i will still be assumed to be normally distributed, with a mean x_i^0 and a dispersion σ_i. I.e., the distribution of x_i is controlled by the expression

(3) $$(\sqrt{2\pi}\,\sigma_i)^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^{-2}(x_i - x_i^0)^2}.$$

(C) All the probabilities defined in (A), (B) can be combined "independently" -- i.e. by multiplication. Actually, (A) will be used for all $i, j = 1, \cdots, n$ with $i < j$, and (B) will be used for all $i = 1, \cdots, r$.

3. In view of the above, the joint distribution of the $(x_1, \cdots, x_n)$ is controlled by the expression

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} (\sqrt{2\pi}\,\sigma_{ij})^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{-2}(x_i - x_j + \mu_{ij})^2} \cdot \prod_{i=1}^{r} (\sqrt{2\pi}\,\sigma_i)^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^{-2}(x_i - x_i^0)^2} \cdot dx_1 \cdots dx_n,$$

i.e. by the expression

(4) $$A\, e^{-\frac{1}{2}Q(x) + L(x)}\, dx_1 \cdots dx_n,$$

where A is a constant $(A > 0, < +\infty)$, and where

$$(5) \quad Q(x) \equiv \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \sigma_{ij}^{-2}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-2} x_i^2 ,$$

and

$$(6) \quad L(x) \equiv -\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \sigma_{ij}^{-2} \mu_{ij} (x_i - x_j) + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-2} x_i^0 x_i .$$

Note, that

$$(7) \quad Q(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j ,$$

and

$$(8) \quad L(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i ,$$

where

$$(9) \quad c_{ij} \begin{cases} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \sigma_{ik}^{-2} + \sigma_i^{-2} & \text{for } i = j = 1, \cdots, r, \\ = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \sigma_{ik}^{-2} & \text{for } i = j = r+1, \cdots, n, \\ = -\sigma_{ij}^{-2} & \text{for } i \neq j , \end{cases}$$

and

$$(10) \quad b_i \begin{cases} = -\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \sigma_{ik}^{-2} \mu_{ik} + \sigma_i^{-2} x_i^0 & \text{for } i = 1, \cdots, r, \\ = -\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \sigma_{ik}^{-2} \mu_{ik} & \text{for } i = r+1, \cdots, n . \end{cases}$$

Thus, combining (1) and (4) with (7)-(10) yields the following formulation of the problem:

(X) The distribution of

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

is being looked for, when the joint distribution of the $(x_1, \cdots, x_n)$ is controlled by

the expression

$$A\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i}\, dx_1 \cdots dx_n .$$

4. Let us now use vector and matrix notations:

$$(11)\quad \begin{cases} x = (x_i) = (x_1, \cdots, x_n) \, , \\ a = (a_i) = (a_1, \cdots, a_n) \, , \\ b = (b_i) = (b_1, \cdots, b_n) \, , \\ \mathcal{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11}, \cdots, c_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ c_{n1}, \cdots, c_{nn} \end{pmatrix} . \end{cases}$$

Then the z in (X) becomes

$$(12)\qquad z = (a \cdot x),$$

and the distribution-function in (X) becomes

$$(13)\qquad A\, e^{-\frac{1}{2}(\mathcal{C}x \cdot x) + (b \cdot x)}\, dx_1 \cdots dx_n .$$

By (5) and (7) the quadratic form $(\mathcal{C}x \cdot x) \equiv Q(x)$ is positive definite. Hence there exists a linear transformation

$$(14)\qquad x = \mathcal{L}y \, ,$$

such that

$$(15)\qquad (\mathcal{C}x \cdot x) = (y \cdot y) .$$

Hence (12) becomes

$$z = (a \cdot \mathcal{L}y),$$

i.e.

$$(16)\qquad z = (a' \cdot y)$$

with

$$(17)\qquad a' = \mathcal{L}^* a$$

($\mathcal{L}^*$ is the transposed of $\mathcal{L}$), and (13) becomes

$$A' \, e^{-\frac{1}{2}(y \cdot y) + (b \cdot \mathcal{L} y)} \, dy_1 \cdots dy_n,$$

i.e.

(18) $$A' \quad e^{-\frac{1}{2}(y \cdot y) + (b' \cdot y)} \, dy_1 \cdots dy_n$$

with

(19) $$b' = \mathcal{L}^* b.$$

Now

$$((y - b') \cdot (y - b')) =$$
$$= (y \cdot y) - 2(b' \cdot y) + (b' \cdot b'),$$

hence (18) may be written

(20) $$A'' \quad e^{-\frac{1}{2}((y - b') \cdot (y - b'))} \, dy_1 \cdots dy_n.$$

Introducing a vector u by

(21) $$y = u + b'$$

therefore replaces (16) by

(22) $$z = (a' \cdot u) + (a' \cdot b')$$

and (20) by

(23) $$A'' \quad e^{-\frac{1}{2}(u \cdot u)} \, du_1 \cdots du_n.$$

(23) is clearly orthogonal invariant, hence u may be subjected to any orthogonal transformation. This means, that the vector a' in the first term on the right hand side of (22) may be replaced by any unitary transform -- i.e. by any vector of the same length. Choose for this the vector with the 1-component $\sqrt{(a' \cdot a')}$, and all other components 0. Then (22) becomes

(24) $$z = \sqrt{(a' \cdot a')} \, u_1 + (a' \cdot b'),$$

At the same time (23) may be written

(25) $$A'' \, e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + \cdots + u_n^2)} \, du_1 \cdots du_n .$$

Inspection of (24) and (25) shows, that the components $u_2, \cdots, u_n$ of u have become completely irrelevant. I.e., the distribution of the z of (24) is simply being investigated for u_1 distributed according to

$$A''' \, e^{-\frac{1}{2} u_1^2} \, du_1 ,$$

i.e., since A''' is merely a probability normalizing factor, according to

(26) $$\sqrt{2\pi}^{\,-1} \, e^{-\frac{1}{2} u_1^2} \, du_1 .$$

Hence the distribution of z is controlled by the expression

(27) $$(\sqrt{2\pi} \sqrt{(a' \cdot a')})^{-1} \, e^{-\frac{1}{2}(a' \cdot a')^{-1} (z - (a' \cdot b'))^2} \, dz .$$

5. (27) shows, that z is normally distributed, with a mean

(28) $$\bar{\mu} = (a' \cdot b')$$

and a dispersion

(29) $$\bar{\sigma} = \sqrt{(a' \cdot a')} .$$

There remains the task to evaluate these two expressions more directly.

By (14) and (15)

$$(\mathcal{C} \mathcal{L} y \cdot \mathcal{L} y) = (y \cdot y),$$

i.e.

$$(\mathcal{L}^* \mathcal{C} \mathcal{L} \, y \cdot y) = (y \cdot y) .$$

This means that

$$\mathcal{L}^* \mathcal{C} \mathcal{L} = I$$

(I is the unit matrix.) Left multiplication be $\mathcal{C}^{-1} \mathcal{L}^{*-1}$ gives

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{L}^{*-1} ,$$

and now right multiplication with $\mathcal{L}^*$ gives

(30) $$\mathcal{L}\mathcal{L}^* = \mathcal{C}^{-1},$$

Now (17), (19) and (28) give

$$\bar{\mu} = (a' \cdot b') = (\mathcal{L}^* a \cdot \mathcal{L}^* b) =$$
$$= (\mathcal{L}\mathcal{L}^* a \cdot b),$$

i.e. by (30)

(31) $$\bar{\mu} = (\mathcal{C}^{-1} a \cdot b).$$

Next (19) and (29) give

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(a' \cdot a')} = \sqrt{(\mathcal{L}^* a \cdot \mathcal{L}^* a)} =$$
$$= \sqrt{(\mathcal{L}\mathcal{L}^* a \cdot a)},$$

i.e. by (30)

(32) $$\bar{\sigma} = \sqrt{(\mathcal{C}^{-1} a \cdot a)}.$$

Next, define

(33) $$w = \mathcal{C}^{-1} a.$$

Then

(34) $$\mathcal{C} w = a,$$

and (31), (32) become

(35) $$\bar{\mu} = (w \cdot b),$$

(36) $$\bar{\sigma} = \sqrt{(w \cdot a)}.$$

6. Equations (34), (35), (36) contain the complete result. Returning to non-vectorial notation, it can be stated as follows:

(Y) Let the c_{ij}, b_i $(i,j = 1, \cdots, n)$ be defined by (9), (10). Let the w_i $(i = 1, \cdots, n)$

be the solutions of the equation system

(37) $$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j = a_i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Put

(38) $$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i ,$$

(39) $$\bar{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i w_i} .$$

Then ξ is normally distributed and has a mean $\bar{\mu}$ and a dispersion $\bar{\sigma}$.

Mrs. Elizabeth Gorman

October 22, 1958

Mrs. Carl Eckart,
347 Vista de la Playa,
La Jolla, California,
U.S.A.

Dear Mrs. Eckart:

Some time ago Mrs. Elizabeth Gorman of the Institute for Advanced Study wrote me that there was some possibility of a translation of the Notes on Continuous Geometry appearing in Portuguese, and sent me copies of correspondence with Professor I. Segal. (For your convenience, I am enclosing copies of these copies.)

I have just received a note from Professor Nachbin of which I enclose a copy. I don't know whether Professor Nachbin is aware of the fact that Johnny stressed in his letter to Professor Segal that "there are some proofs that I should like to rearrange. . . . I shall be glad to supply the improved versions of these. . . . I shall be interested to learn more about the details of their plans."

Nor do I know what relation the appearance of a translation into Portuguese would have, could have, or should have on the proposed printing of the book by the Princeton University Press.

Perhaps you or the Princeton University Press would like to take this matter up with Professor Nachbin directly. If there is anything further that I can do, I hope you will let me know.

Mrs. Gorman also told me that she had on file a letter to Professor von Neumann from Professor H. Lowig, but that she had no record of a reply from Johnny to Dr. Lowig. Dr. Lowig is now with the Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada. He has written to me that he did receive such a reply which, in particular, contained the following paragraph: ". . . you will realize that the lecture notes were written after a course of lectures in order to provide the basic material for a subsequent publication (in book form), but were not intended for publication as such. The writing of the book was delayed by the war, and while I hope to get around to it sometime it looks to me as though it will still have to be delayed a little. As far as I knew, the notes were rigorous, although the lemma to which you refer contains an error. Most of the proofs which I gave have many variants, of which I wrote down in every case the one which seemed to be most quickly formulable, but I didn't have at that time the leisure to go thoroughly into the question of determining in every case the briefest or most elegant proof - this is, of course, what I would insist on doing before publishing it . . ."

I have just found among my papers fourteen pages of notes of a manuscript entitled "Measure in Functional Spaces", by J. von Neumann. I made these notes in Princeton in February, 1936. Since then, I have not heard anything further of this manuscript. I could, with some effort, reconstruct a large part of the original manuscript from the notes that I have. I would be glad to do so if the original manuscript is no longer in existence. Could you tell me whether the original manuscript does exist or not, and whether this matter is of any interest to the project of publishing the Collecta?

With very best greetings,

Yours sincerely,

IH

IH:dh

I. Halperin

For Taub's attention.

Refers to some paper of Johnny's which may or
or may not have been written. KvN.

Nothing of interest to collected Works

Ber

COPY

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua São Clemente, 265

Rio de Janeiro - Brasil

October 15, 1958

Dr. Israel Halperin
Queen's University
Kingston, Ontario

Dear Dr. Halperin:

Thank you for your letter of September 15, 1958. As you already know, Professor von Neumann gave his permission for a translation of Continuous Geometry. Such a translation was done but since I intended to improve some of the proofs, the translation did not appear as yet. I hope however that the portuguese translation will appear in our collection "Notas de Matematica".

With greetings, I remain,

Sincerely yours,

(Signed)

Leopoldo Nachbin

Aronszajn

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DIGITAL COMPUTER LABORATORY
URBANA, ILLINOIS

October 17, 1958

Professor N. Aronszajn
Department of Mathematics
The University of Kansas
Lawrence, Kansas

Dear Professor Aronszajn:

Thank you very much for your letter of October 9th and the part of the reprint that it contained.

I assume that the method of approximating eigenvalues that von Neumann discussed with you had to do with making a series of two dimensional rotations and thereby decreasing the sum of the squares of the off-diagonal elements of the matrix. I do know where to find material on this method among von Neumann's papers. If this guess as to the method is incorrect, I would appreciate knowing that for then I would institute a further search.

Thank you very much for your trouble.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:je

cc: Mrs. E. Gorman
Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Aronszajn

COPY

October 7, 1958

Professor N. Aronszajn
University of Kansas
Lawrence, Kansas

Dear Professor Aronszajn:

I am editing the collected works of the late Professor John von Neumann. In connection with this work I have been going through his files and found correspondence between yourself and von Neumann concerning two problems. I would very much appreciate it if you could take the time to write me about this.

The first of these problems has to do with operators in Hilbert space. von Neumann mentions in a letter to you that he proved that every totally continuous operator in Hilbert space has a non-trivial invariant subspace. Do you know whether he ever published this? If not, did he ever communicate to you the proof?

The other problem that is mentioned in this correspondence has to do with the method for calculating the characteristic roots. Do you remember what this method was and whether von Neumann published it in the open literature or in report form?

Thanking you in advance for any comments you may have about these problems,

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg

Aronszajn

THE UNIVERSITY OF KANSAS
LAWRENCE
Department of Mathematics

October 9, 1948

Professor A. H. Taub
The Institute for Advanced Study
Princeton, N.J.

Dear Professor Taub:

I am glad to answer your questions concerning the correspondence I had with von Neumann.

Concerning the completely continuous operators in Hilbert space, von Neumann never published the proof. There is a mention of his proof in my paper with K. T. Smith. (I enclose a page from the reprint where the reference is given.)

Concerning the second problem, I had a long conversation with von Neumann about approximation methods for eigenvalues (1948). During this conversation he showed me his method with the corresponding evaluation of error. I understood that the computer that he was building in Princeton at this time was supposed to have a specially designed routein to apply this method. I am not aware that he published this anywhere, but it might well be found in some report concerning the machine, or Dr. Goldstine would know about it. I never had the opportunity to talk with von Neumann again about this subject and I have often wondered if, finally, the method was put as a routine for the computer. I would appreciate it very much if you would drop me a line about this if you get the information.

I feel sure that you will find the method described in a report (or from Dr. Goldstine) but if not, I do remember the main features of it and I believe that I could reconstruct it if you wished me to do so.

Very sincerely yours,

(signed)

N. Aronszajn

July 15, 1948

Dear Professor Aronszajn,

Many thanks for your letter of July 8th.

I regret that I must have misunderstood your remarks about Dixmier. I did write a note to him, thanking him for the papers he sent me, but I had not originally understood that he was sending his manuscript in order that I could submit it for publication in America. His letter of April 24th does not make this clear. The paper, by the way, seems excellent to me, and I shall be very glad to help to get it published here. I am writing with this same mail to Dixmier to this effect. I am sorry I caused all this delay, and I am very much obliged to you that you kept the matter in mind and thereby prevented me from not taking care of this matter, which I would have exceedingly regretted.

I think that I now remember better what I did or did not prove in the 1930's regarding the theorem that every operator must have a non-trivial invariant subspace. The state in which I had the problem when I stopped working on it was this:

(a) I did prove that every totally continuous operator in Hilbert space has a non-trivial invariant subspace;

(b) In view of this, I surmised, but was unable to prove, that the same is true for every operator.

The things that you write me about representing bounded operators as parts of other bounded operators defined in suitable over-spaces are very interesting. I have one difficulty in connection with your definition: The operator L = PH seems to have values in the under-space, but it is defined in the over-space. Should it not be an operator which is also defined in the under-space? How do you adjust this situation? If you could give me more precise details on this matter, I would probably be able to orient myself with respect to it and the literature that I know.

Much to my regret, I am leaving for the West in a few days and I expect to return to Princeton only toward the end of September. Where do you expect to be about that time? At any rate, I hope that we shall remain in touch with each other during my absence. The things that you tell me interest me very much. My mail will reach me with only a short delay via the Institute for Advanced Study.

I am,

Sincerely yours,

JVN:LD

JOHN VON NEUMANN

Professor N. Aronszajn
Harvard University
Cambridge, Massachusetts

HARVARD UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING

Pierce Hall
Cambridge 38, Massachusetts

July 8, 1948

Professor John von Neumann
Institute for Advanced Study
School of Mathematics
Princeton, N. J.

Dear Professor von Neumann:

Thank you very much for your letter of June 8.

I am very much interested in your hint that in the 1930's you may have proved the theorem that every operator must have a non-trivial invariant subspace. If this theorem were true, I think that it would be possible to develop a quite precise theory of the invariant subspaces of operators, but without this theorem, I have found it impossible to procede any further in the building up of a general theory.

Another aspect of the operator theory in which I am interested is the question of some kind of extension of the spectral theory for non-symmetric operators. I see a possibility of doing this by using some theorems which I could prove, but I am not sure whether they may not have already been discovered. It is, essentially, that every bounded operator can be represented as a part of a normal bounded operator, the latter defined in an overspace. These normal operators are not unique, and what I still lack is the general characterization of all the possible normal operators of this kind. I should mention here that I call an operator L defined in a subspace $\mathcal{L}$, the part of an operator H defined in a space $\mathcal{H}$ containing $\mathcal{L}$ when L = PH, P being the projection on $\mathcal{L}$. This notion is of essential importance in my results concerning the Rayleigh-Ritz and Weinstein methods and I have an impression that by extending certain methods used in this research to general bounded operators, and representing them as parts of normal operators for which one can use the spectral decomposition, that one could get theorems about the spectrum of general bounded operators.

Have you any recollection of papers dealing with some of these ideas?

Since I last wrote you I have heard from Dixmier who has recently received his Doctor's degree in Paris, and he tells me that he has not as yet received any letter from you. I imagine that the letter which you wrote to him and which you told me about must have been lost. If there is anything more definite concerning the publication of his paper, I know he would be very glad to hear about it.

I hope that you had a pleasant trip to Chicago, and should you be visiting near Cambridge I would be very glad to have an opportunity of seeing you again.

Sincerely yours,

N Aronszajn

N. Aronszajn

NA:slk

June 8, 1948

Dear Professor Aronszajn,

Please excuse my delay in answering your letter of May 26th. I was away from Princeton for several days and got badly behind with my mail. At this moment I am leaving for Chicago, but I didn't want to delay writing to you any longer. Please forgive me, therefore, the hurried character of this letter.

I am very glad to learn that you judge that the method for calculating the characteristic roots which I described to you when you were in Princeton is an effective one. I have not written it up yet, but I will take the liberty of sending you a writeup when I have one.

Your questions about operators are very interesting, and I recall that I have also thought about these problems in the 1930's. It will take me a little time to refresh my recollections and get oriented again - my superficial impression is that operators without non-trivial invariant subspaces do not exist. I shall write you in more detail about this subject, if I may, a little later.

I am much obliged to you for having written to Dixmier. I shall get in touch with him about the publication of his paper shortly after I have returned from Chicago.

I, too, hope that there may be another occasion to see you before you leave this country.

With best regards,

Sincerely yours,

JOHN VON NEUMANN
(Dictated but not signed by JVN)

JVN:LD

Professor N. Aronszajn
Harvard University
Graduate School of Engineering
Pierce Hall
Cambridge 38, Massachusetts

HARVARD UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING

Pierce Hall
Cambridge 38, Massachusetts

May 26, 1948

Professor John v. Neumann
Institute for Advanced Study
School of Mathematics
Princeton, N. J.

Dear Professor v. Neumann:

After I left you I thought over the method you described for calculating the characteristic roots. I think now that for your purposes it is the most suitable of all methods I know and the evaluation of the "total error" is a real beauty.

In the heat of the discussion about these questions I forgot that I wanted to ask you some other questions. As I do not know if I shall see you again in the near future, I shall write down some of them which have been hampering me for a long time. I have not found any hints about these questions in the literature in spite of the fact that I am sure many mathematicians must have come across them.

The question is about invariant linear closed subspaces for operators. I will limit myself to bounded operators L. A linear closed subspace $\mathcal{H}_1$ of the Hilbert space $\mathcal{H}$ is invariant (in generalized sense) if $L(\mathcal{H}_1) < \mathcal{H}_1$.

Are there general theorems about the structure of such subspaces for a given operator L (besides the settled hermitian or normal cases)?

Does there exist an operator L with no invariant subspaces except the trivial ones $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_1 = 0$?

I have already written to Dixmier explaining the ommission you made in your letter to him, as you asked me to do. If there is anything new about his paper and its publication could you kindly let me know about it?

Perhaps before going back to France I will have another opportunity of seeing you.

With best regards.

Sincerely yours,

N Aronszajn

N. Aronszajn

NA:slk

Chandrasekhar

April 22, 1958

Dr. A. H. Taub
School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Dear Dr. Taub:

III a.
#8

Thank you for your letter of April 3. As you have noticed yourself, I have incorporated most of von Neumann's work on the point source model in my Stellar Structure. I recall that at about the same time von Neumann also did some calculations on the isothermal sphere in general relativity; but I do not believe that these have ever been published.

You may be interested to know in this connection that the basic idea in the proof of a fairly "deep" theorem in the equilibrium of a star is due to von Neumann: You will find reference to this in my paper in the Astrophysical Journal, 87, p. 535, 1938: see particularly the acknowledgment on page 552.

I should certainly be glad to look at von Neumann's other writings relating to astronomy, but I am afraid that I will not be able to do this within the next two or three months. But I could do it during the summer when I will not be as harassed as I am at present.

With very best regards,

Yours sincerely,

(Signed)

S. Chandrasekhar

C O P Y

April 3, 1958

Professor S. Chandrasekhar
Yerkes Observatory
Williams Bay, Wis.

Dear Chandrasekhar:

As you know, I have been working through various papers left by von Neumann. In doing so I have come upon some correspondence between you and von Neumann dating back to 1935. This correspondence has to do with a manuscript that von Neumann sent you relating to the point source model. I have found a handwritten document labeled the point source model. I am wondering whether any of this material about which you corresponded with von Neumann ever was published and, if so, where? I remember your telling me that when you were writing one of your books you did use some results obtained by von Neumann. Did these results relate to his treatment of the Emden equation and the point source model? Were these ever published separately by von Neumann? I am going to try to read the handwritten material and compare it to that given in your book. Would you have time for and interest in looking at various handwritten things relating to astronomy that I found among von Neumann's papers? It would be most helpful if you could so so and I would be very grateful for any suggestions you might have concerning the disposition of these papers.

With very best regards,

Sincerely yours,

A. H. Taub

P.S. I shall be back in Urbana at the beginning of next week and can be reached most easily there. AHT

Bott

March 26th/58

Dear Taub,

Forgive this shameful delay in answering your letter of the 24th of Jan. I have only now rediscovered von Neumann's paper; the one you are interested in. It's title is: "Reliable organization of unreliable elements." I have a photocopy and have never seen it in print.

Best regards,

(signed)

Raoul Bott

COPY

This is published #127

EHJ

Bott

January 24, 1958

Dr. Raoul Bott
Department of Mathematics
University of Michigan
Ann Arbor, Michigan

Dear Bott:

I have been going through Professor von Neumann's scientific papers and have run across a letter dated September 10, 1951, from von Neumann to you. In this letter he refers to a manuscript which is being sent to you which will, he says, have to be rewritten before it is published. I wonder if you could tell me what this manuscript is, and whether it has ever seen the light of day.

Thank you very much for your trouble.

Sincerely yours,

A. H. Taub

AHT:esg

(R Bott)

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

PRINCETON, NEW JERSEY

September 10, 1951

Dear Raoul:

This is the manuscript that I had mentioned to you. It will have to be rewritten before I publish it. A good deal more ought to be said in the Introduction, and some other subjects which were only touched on quite lightly (like the contents of Section 5.), or not at all (like the possible role of the "majority organ", i.e. a 3-input-1-output organ which responds if and only if a majority of the 3 inputs are stimulated) should be discussed in detail. Also, the relation to the general literature should be taken up.

I will rewrite this manuscript with these things in mind in the course of the next week.

With best regards,

Yours,

John von Neumann

JvN:eg
Encl.

Dr. Raoul Bott
Department of Mathematics
University of Michigan
Ann Arbor, Michigan

18th March, 1958.

1526, 32nd Street N.W.,
Washington 7, D.C.

Dear Robert,

Thank you for sending me the copy of your letter to Abe Taub. I assume that in the meantime you have also received a copy of Captain Maxwell's contract proposal to me.

It seems to me that his suggestions are reasonable, although one may want him to be a little more specific on the price of the "Collecta". Of course I will be very much interested to have your comments on it before taking it to Marx Leva, who will check it from the Estate point of view. I understand that the final contract with Maxwell will have to be signed by me for the Estate.

I think matters have now reached the stage where I have very little more to say. I would naturally accept any agreement of dividing the cost between Pergamon Press and the ONR contract that you, Taub and Maxwell, find satisfactory to finish the work. Abe's division of cost and grouping of the material as described in his memorandum of 11th February, seems reasonable to me, on the other hand I feel that these are also matters in which I should not try to interfere with in one way or the other. What I am really trying to say is, that having collected all papers that I could put my hands on, got Abe to agree to do the editing, from here on I would like to leave it entirely in your and Taub's hands to see to it that the publication is being done in a manner satisfactory to the scientific public. I will, of course, be most grateful if kept informed of anything connected with the progress of the publication and will be naturally always available if needed for any reason.

I wanted also to tell you Robert, that very soon I shall leave the East for good and move to La Jolla. Carl Eckart and I are getting married within a fairly short time, as you may know he is at the Scripts Institute of Oceanography at La Jolla. We hope to be able to stop in Princeton for a few days before heading West, but this may be at a time when you are abroad.

telegrams sent to Mrs. v N and Dr E 3/21

I do want to thank you most sincerely for all the help that you have extended to me in the past difficult year and hope that we shall meet again in the not too distant future.

With best regards,

Klari

Hurd

February 17, 1958

Professor A. H. Taub
University of Illinois
Urbana, Illinois

Dear Abe:

I have your letter of January 27, concerning a transcript of a tape recording of John von Neumann. This was in connection with his remarks at the Watson Laboratory in April, 1954.

Klari von Neumann has also asked me a question concerning a patent which John sold to us. This patent contains essentially the information which he was describing in the lecture. The patent is now issued, and I am sending you a copy of it with the thought that it might be more directly beneficital to you to publish what you desire directly from the patent.

We made a transcript of John's remarks but have not edited them or filled in the gaps since it was our judgment that the patent description served as a clear exposition.

Cordially yours,

(signed)

Cuthbert C. Hurd

January 31, 1952

Dear Dr. Machta:

I am enclosing two copies of the surface-integration-estimation-scheme that we discussed at our last meeting in Princeton. I have tried to give a complete derivation but the results can be stated in a good deal less space. The summary on Page 0, and the statement of the result under (Y) on the bottom of Page 6 and the top of Page 7 actually give all that is "operationally necessary." As you see, most of the work involved will be connected with solving the linear equation system (37). It is of the order n x n where n is the number of "areas" considered. You indicated that n should be about 50. I am sure that this can be handled with the SEAC with some exertion. A value like n = 20 can be handled with the SEAC, I think, with great ease. One might want to do the latter first, as a preliminary exploration. I will be glad to give you more details on these matters, also estimates on the size of the problem, etc.

I would like to add, that it could also be solved with various other machines, e.g. the ENIAC. I assume, however, that your communications with the SEAC are already worked out and that this will be the easiest approach for you.

Let me restate, that the problem looks to me perfectly manageable and not of excessive size, even for n = 50.

With best regards,

Sincerely yours,

John von Neumann

JvN:eg
Encls.

Dr. Lester Machta
U.S. Weather Bureau
24th and M Streets, NW
Washington 25, D. C.

Hurd

January 27, 1958

Dr. Cuthbert C. Hurd
International Business Machines Corp.
590 Madison Avenue
New York 22, New York

Dear Dr. Hurd:

I have been given some responsibility in connection with the handling of Professor von Neumann's scientific papers. In going through these I have found a transcript of a tape recording made of his remarks at the Watson Laboratory on April 29, 1954. Are there any proprietary interests in these remarks or may they be gone over with a view for possible publication? Has anything ever been done to fill in the gaps which appear in the transcript? I would appreciate any comments you have on these questions.

III #44

Sincerely yours,

A. H. Taub
(Dictated but not signed by AHT)

AHT:esg

P.S. I shall be leaving Princeton in a day or so and it would expedite matters if you would please write to me at Urbana. AHT

Corresp. relating to C. 16

February 13, 1958

Professor Jule G. Charney
Department of Meteorology
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge 39, Massachusetts

Dear Jule:

Thank you very much for your letter of February 3. Mrs. Gorman has written Machta as you suggested. I shall pass on your request concerning the report entitled "The Fourier Transformation Method for Two-Dimensional Prediction" to Klari. She has the final jurisdiction as to the disposition of the material in the files. I am sorry that we missed each other in Princeton and hope that it won't be too long before our paths cross again.

Sincerely,

A. H. Taub

AHT/hc

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
CAMBRIDGE 39, MASSACHUSETTS

DEPARTMENT OF METEOROLOGY

3 February 1958

Dr. A. H. Taub
School of Mathematics
The Institute for Advanced Study
PRINCETON, New Jersey

Dear Abe:

Johnn's report entitled "The Fourier transformation method for 2-dimensional (barotropic) prediction" has never been published to my knowledge. However, we did use the method in a joint paper entitled "Numerical integration of the barotropic vorticity equation" which appeared in Tellus, Vol 2, No. 4, 1950. Tellus is a Swedish Geophysical Publication. In this paper the method is set forth in detail; hence I see no point in publishing the report. If you have no other use for the report, I would like very much to have is as a momento.

I know nothing about the "surface-integration-estimation-schemes" report to which you refer in your postscript. Machta would be the one to ask.

Elinor and I visited Princeton last week. I am sorry we were unaware of your presence or we would have looked you up.

With best regards,

Sincerely,

Jule

Jule G. Charney

JGC/jms

Charney

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

PRINCETON, NEW JERSEY

January 27, 1958

Dr. Jule G. Charney
Department of Meteorology
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge 39, Mass.

Dear Jule:

I have been spending the last few days in Princeton going through Johnny's scientific papers with a view to organizing them for publication. In doing so I found an ozalid of a report entitled, "The Fourier transformation method for 2-dimensional (baratropic) meteorological prediction." Do you know of this report? Can you tell me whether it was ever issued or published in any form and, if so, where? If not, do you have any recommendations as to its disposition?

Thank you very much for your trouble. With best regards,

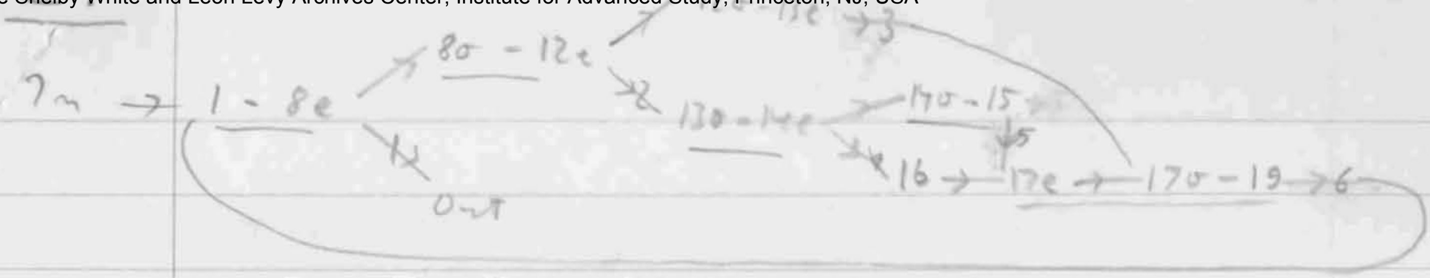
As ever, yours,

A. H. Taub
(Dictated but not signed by AHT)

AHT:esg

P.S. There is one other document about which I would like your advice. This is an ozalid having to do with a surface-integration-estimation-scheme that Johnny evolved in connection with some request from Dr. Lester Machta of the U.S. Weather Bureau. Do you know about this, and do you have any comments on it? AHT

COPY



$8 + {}^{1}4 + 2 + {}^{1}1 + 3 = 18\,w \sim 18 \times .12 = 2.16$ ms

$1\times \sim 1 \times .50 = .50$ ms

$20 + 20 + 20 + 35 = 95\,sh \sim 95 \times .005 = .47_5$ ms

Total 3.13_5 ms

$16 \times 3.13_5 = 50.16$ ms

$16^2 \times 50.16 = 12{,}840.96$ ms ~ 12.84 s

$4 \times 12.84 = 51.36$ s $= .85_6$ m

Corrigenda: $\bar{U}^* - 1 \to \bar{U}^*$ in S.

Teller

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

RADIATION LABORATORY
BERKELEY 4, CALIFORNIA

February 6, 1958

III a. № 3

Dr. A. H. Taub
The Institute for Advanced Study
School of Mathematics
Princeton, New Jersey

COPY

Dear Dr. Taub:

Thanks for your letter of January 27th. Johnny von Neumann discussed the paper in question with me and actually it was going to be a joint publication. I was not terribly happy about it, however, and apart from criticizing his first draft, I did not do much of further work.

Johnny's suggestion has the merit of great speed. At that time I had the feeling that it would not be very practical. I think that it would be perfectly all right to include it in his papers essentially in the form it now is. If you want my help for editing purposes I shall be glad to do so, particularly if you let me have the copies with my penciled remarks.

My offhand judgment would be that it would do no harm to forget about the paper. What action you take should depend on the question of whether you consider the suggestion as helpful and whether you aim at a really complete survey of Johnny's suggestions. Johnny took this possibility quite seriously at the time and if completeness is your aim, you must certainly include the manuscript.

Sincerely yours,

(signed)

Edward Teller

Teller

January 27, 1958

Professor Edward Teller
Radiation Laboratory
University of California
Berkeley, California

Dear Professor Teller:

As you may know, I have been given some responsibility for dealing with von Neumann's scientific papers. For the past few days I have been going through his files and have run across a letter to you dated September 19, 1953, and an ozalid of a manuscript entitled, "Notes on the photon-disequilibrium-amplification scheme." There also exists another copy of this manuscript in the files with some pencilled remarks made by you. I would be very grateful if you would tell me something about the background of this paper, and give me any recommendations you may have as to what you think ought to be done with it. I hope you will not find this request too much of a burden.

With best regards,

Sincerely yours,

A. H. Taub
(Dictated but not signed by AHT)

AHT:esg

Bruce

THE CARTER OIL COMPANY
RESEARCH DEPARTMENT
1133 No. Lewis
Tulsa, Oklahoma

Post Office Box 801

February 6, 1958

Mr. A. H. Taub
The Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Dear Mr. Taub:

I have your letter of January 27 relative to some files of correspondence and reports found in the collection of the late Dr. John von Neumann's scientific works. In particular, you referred to a report labeled "An Analysis of the Linear Displacement of Oil by Gas-Driven Solvent" dated June, 1953. I am sure it will be all right to put this information in the public domain. The work covered in this report represented only a partial solution of the problem. The entire problem was covered by a paper, title same as above, in which credit was given to Dr. von Neumann for his contribution. The final manuscript of this paper was submitted to the AIME and has been rejected because it was too long. We have not yet decided what to do with the paper. Meanwhile, you are free to do what you wish with the June, 1953 manuscript. However, if you do make the report public, we would appreciate being advised of your action.

I hope some day ~~to~~ review the work done for us by Dr. von Neumann, and when I have time to do this I will undoubtedly communicate with Mrs. von Neumann who will pass on the information to you. Unfortunately, I have not found time to do this and may not for several months.

Very truly yours,

(signed)

W. A. Bruce
Assistant Chief of Research

Bruce

January 27, 1958

Dr. W. A. Bruce
The Carter Oil Company
Tulsa, Oklahoma

Dear Dr. Bruce:

Early in November of 1957 Mrs. von Neumann wrote you that I would be working on getting out a collection of the late John von Neumann's scientific works. You had previously given permission to make use of two reports representing work done for the Carter Oil Company. You had also mentioned that it would be desirable for one working with this material to know the background and the origin of his work. I would very much appreciate any material of this nature that you can give me. I would also very much appreciate a statement from you or your Company as to what may be done with the scientific manuscripts that are in the correspondence files of the late Professor von Neumann, that relate to work done for the Carter Oil Company and various affiliated organizations. In particular, there is a report labeled FOR COMPANY USE ONLY entitled, "An Analysis of the Linear Displacement of Oil by Gas-Driven Solvent," dated June 1953. Would this report be available for inclusion in the collected works of Professor von Neumann, if it turned out to be desirable to so include it?

Thank you very much for your trouble.

Sincerely yours,

A. H. Taub
(Dictated but not signed by AHT)

AHT:esg

Kaplansky

Feb. 3/58

Dear Abe:

This will confirm in writing a portion of our conversation.

Johnnie's letter of March 1, 1950 referred to dimension functions in non-separable rings of operators, especially those of Type III. He never published on this, nor did his manuscripts visible in Princeton contain anything relevant. But this material is very easy and anyone in the field can reproduce it.

Sincerely,

(signed)

Irving

Kaplansky

January 27, 1958

Professor Irving Kaplansky
Department of Mathematics
University of Chicago
Chicago, Illinois

Dear Irving:

You may have heard that I have got some responsibilities now in connection with getting out Johnny's collected works. Therefore it is my turn to bother you about something.

In going through von Neumann's files I found a copy of a letter dated March 1, 1950, from him to you. In this he mentions that he had considered some questions regarding the cardinal dimensions in the nonseparable case. These were similar to questions that you had raised in your letter to him. Do you happen to know whether this work was ever published and, if so, where? I hope you will forgive me for bothering you about this, but any information you can give me would be most helpful.

I would like to say that you have already been very helpful to me in going over von Neumann's manuscripts and making very cogent remarks about them. I, for one, am most grateful for what you have done and hope that I may call on you again if the occasion shall arise.

With very best regards,

Sincerely yours,

A. H. Taub
(Dictated but not signed by AHT)

AHT:esg

I. Kapalansky

March 1, 1950

Dear Dr. Kaplansky,

Very many thanks for your letter of February 11th and your manuscript on "Projections in Banach Algebras". I am very glad that you are submitting it for THE ANNALS, and I will immediately recommend it for publication.

Your results are very interesting. You are, of course, very right: I am and I have been for a long time strongly interested in a "purely algebraical" rather than "vectorial-spatial" foundation for theories of operator-algebras or operator-like-algebras. To be more precise: It always seemed to me that there were three successive levels of abstraction - first and lowest, the vectorial-spatial, in which the Hilbert space and its elements are actually used; second, the purely algebraical, where only the operators or their abstract equivalents are used; third and highest, the approach when only linear spaces or their abstract equivalents (i.e. operatorially speaking, the projections) are used. There is also a possible intermediate stage between the second and the third one, when only Hermitean operators or their abstract equivalents are used. After Murray and I had reached somewhat rounded results on the first level, I neglected to make a real effort on the second one, because I was tempted to try immediately the third one. This led to the theory of continuous geometries. In studying this, the third level, I realised that one is naturally led there to the theory of "finite" dimensions only. This discrepancy between what might be considered the "natural" ranges for the first and the third level led me to doubt whether I could guess the correct degree of generality for the second one. In addition I assumed that the best intuitive guide in this field is the analogy with quantum mechanics, and the quantum mechanical interpretation seemed to justify the approach on the third level, or on the intermediate one between the second and third levels (Hermitean operators) rather than on the second level. As you know, I made one more effort in this intermediate direction, about half of this is described in my paper in the Mat. Zbornik. The other half of this effort is a theory of dimensions within the algebraical framework of the first half. I have never published it. I used an equivalence theory based on the "bisecting" projections which appear in your proof of your lemma 5.1 (cf. your preliminary remarks on page 7). I obtained the usual subdivision into the types I, II, III - finite and infinite - and used this to pass to a Hilbert space in the cases other than III.

Your treatment of the purely algebraical case - that is, what I would call the second level - strikes me as very elegant and very satisfactory. In looking at your simple proof of the additivity of finiteness in section 6, the lemma 6.1 seems to me to contain the decisive trick. This is certainly very pretty, and impresses me, too, as being the logical way to handle this problem. Murray and I at this point certainly made our lives harder than necessary. The sequence 5.2 to 5.4 seems to me less radically different from our procedures. In fact, some of the peculiarities of Murray's and my procedure were due to a peculiar idiosyncrasy of mine: I was very anxious to derive the concept of abstract, as well as of numerical, dimensionality without a need for a prior distinction between the discrete and continuous cases. In other words, I felt it was a "better and purer" proof, which permitted one to get all the general properties of dimensionality first, and permitted one to derive its isomorphism to rational integers or to real numbers afterwards, "in the Euclidean manner". You are obviously uninhibited about making the classification into discrete and continuous cases earlier in the deduction.

I hope that these anatomical discussions will not obscure the fact that I am very impressed by your paper, and feel that it is very interesting and beautiful. The conciseness and simplicity of your postulates A, B (page 3) are certainly all one can wish for.

Your questions regarding the cardinal (Cantorian aleph) dimensions in the non-separable case are very interesting. I did also consider the non-separable case, but on the first level only - that is, in the case of operator rings in actual non-separable Hilbert spaces. I obtained, of course, the same cardinal dimensions which you do. If I remember those things correctly, the difficulties to which you refer do not arise in that case because the alephs of the dimensionality can then be connected with certain topologically defined alephs (minimum alephs of everywhere dense sets and the like). Since this was more than ten years ago I do not remember the details well, but I could try to work them out. Unluckily, they may not be very helpful in the case which concerns you, since your investigations take place on the second, purely algebraical level. I will think more about the subject and see whether I am able to come out with anything that is useful.

I hope that you will let me know more about your work on these subjects as it progresses. I can assure you that I am very glad to be reminded about these things.

With best regards,

Sincerely yours,

JOHN VON NEUMANN

JVN:LD

Dr. I. Kaplansky
The University of Chicago
Department of Mathematics
Chicago 37, Illinois

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
CHICAGO 37 · ILLINOIS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Feb. 11, 1950.

Dear Prof. von Neumann:

I am enclosing a paper to be considered for the Annals. You will perhaps find some things of interest in it. If I judge your published work correctly, you have always been concerned with the program of developing rings of operators theory in a "purely algebraical" rather than spatial fashion. This is what I am pursuing, and I have developed portions of the theory from what seem to me to be unusually mild axioms. In fact I was surprised to find the theory work so successfully, starting from such an apparently feeble analogue of weak completeness.

In the case of actual rings of operators there may be some interest in several things in the paper - beyond the formal generalization to the inseparable and reducible case. May I call your attention to: (a) the brief proof of the additivity of finiteness (Th. 6.2) - with no use of unbounded operators, (b) the equivalence (Th. 5.4)

$$(e \cup f) - f \sim e - (e \cap f)$$

which I found very helpful in understanding what was going on, (c) the brief proof - prior to any development of dimension theory - that in the finite case we have a continuous geometry. Anything new to you here?

I have done a little work on dimension theory in the nonseparable case, and I would like to take this opportunity to find out whether I am merely reproducing things known to you. Here is a brief sketch:

Type II. In an infinite factor of Type II, let e be a finite projection, f an infinite projection. We can arrange to have e "divide" f an exact number of times, say $\aleph$. The fundamental question arises at once: is $\aleph$ invariant? The answer is yes. I am a little unhappy that in my proof I use the full resources of the trace function - above all its additivity. Anyway, once this is settled there is no further difficulty in setting up dimension theory. We call the algebra of Type $II_{\aleph}$ if the dimension of 1 is $\aleph$, and the dimension runs over all real numbers and all cardinals $\leq \aleph$.

Type III. I have adopted the following attack. Any non-zero projection divides itself an infinite number of times. Given e, consider all cardinals such that e divides itself that many times, and let $\aleph$ be the smallest cardinal that exceeds all of these. I call $\aleph$ the dimension of e. It is easy to prove that this dimension correctly gives the ordering of projections: that is, the equivalence classes of projections are in one-one correspondence with these cardinals. In particular, they are well ordered, and there is a smallest (and of course a largest). We might speak of Type $III_{\aleph, \aleph'}$. So far, so good, but two questions arise at once that I cannot answer.

1. Can any of these dimensions be limit cardinals? It is easy to see that such a cardinal would have to be inaccessible, and it is hard to believe that inaccessible cardinals can really be relevant in this theory. If in fact the answer is negative, one would promptly revise the notation by pushing each cardinal down one notch. We would then still ask:

2. Is every cardinal between the top and bottom actually attained? One can see that this is the same as a question of uniqueness. Let e be a projection of smallest dimension , and f a larger projection. Is the cardinal number obtained by dividing f by e an invariant?

I hope you don't mind being reminded about things you worked on 15 or more years ago!

Sincerely,

I. Kaplansky

I. Kaplansky

Prof. Montgomery called just to let this office know that Dr. Taub of the University of Illinois plans to be here ca. Thurs. and Fri. June 20 and 21, to study the von Neumann papers on computing and applied mathematics. He is also presumably representing the U. of Ill. press, which has a contract for any unfinished ms.

June 3, 1957

Mr. Marx Leva
1701 K Street, N.W.
Washington, D. C.

Dear Mr. Leva:

Thank you very much for your letter giving permission to publish von Neumann's manuscript of nineteen pages on continuous geometry and rings of operators. Professor Kaplansky is preparing this for publication and it will appear in the Annals of Mathematics a few months from now. The consensus of opinion at present is that among the older unpublished manuscripts this is the only one which should be published. However, I believe they should all be preserved for two reasons: a) so that they could be published later if the consensus of opinion changed; b) so that they could be consulted by interested mathematicians since in any case they contain material of some value. Some of the newer manuscripts may also need to be published, but I believe others may write to you about them. They should likewise be preserved.

I am writing now to see if the estate would be willing to have certain parts of the unpublished material reproduced on microfilm or photoprint to be sent to two or three of von Neumann's former associates who have expressed great interest in these things. Oppenheimer has suggested that the Institute would be willing to have this done if the estate agrees. It seems to me that this procedure might be of some help in preserving and making the most effective use of Johnny's ideas.

Incidentally, Johnny's desk in his office here has not been unlocked, and it might conceivably contain additional manuscripts. It occurs to me that you might want us to open it to see, but on the other hand you may feel that it should be left as it is until Klari wishes to open it.

Sincerely yours,

DM:MMM

Deane Montgomery

cc: R. Oppenheimer

Muil mik

6/3/57

Prof. Montgomery stopped in with the following about von Neumann papers.

yes

1. There are two or three people who might be interested in seeing some of the unpublished material who would not find it convenient to come to Princeton. M. wonders what you would think of Inst. spending ca. 30-40 dollars on microfilming some of the material. (If Estate is willing)

2. M. thinks there is only one old unpublished ms. worth publishing. He has Estate's permission for this (sent us cc of his letter to them). M. has not gone through computing papers. Of remaining papers, there are some handwritten mss, of papers which were published, and others unpublished which he thinks would be of interest to other scientists. He thinks might be appropriate to keep them--would take about 2 file drawers. (If Estate is willing).

3. Bigelow has found one unfinished paper which he wants to finish. There is a contract with U. of Illinois press on this. M. feels this is entirely between Bigelow, Estate, and U. of Ill. He is glad not to be involved.

yes

4. von Neumann desk has never been opened. It might contain other papers. Would Estate want us to open it.

5. Would RO want to write to Estate about these matters, or prefer that M. do it?

May 20, 1957

Mr. Marx Leva
1701 K Street, N.W.
Washington, D. C.

Dear Mr. Leva:

Among the manuscripts in Professor von Neumann's office there is one of about nineteen pages in his handwriting which should be published, and I am writing to ask you for permission for such publication. This manuscript was probably written in about 1937 and is on continuous geometry and rings of operators. Professor Kaplansky, of the University of Chicago, who is here in town this year and is an expert on both these fields, says that this paper treats a problem which has been considered by himself and other workers without success. He feels that the problem is a significant one and that there would be considerable interest in von Neumann's solution. Kaplansky feels that it would be best to publish this article in a scientific journal rather than, say, as an appendix to the book on continuous geometry being planned by Princeton University Press. Mr. Bailey, of the Press, has told me that this is entirely agreeable to him, and that he would like to see it published in the form considered best by Kaplansky. If you grant permission for publication, I will undertake to place it in a scientific journal and have Kaplansky oversee preparation of the manuscript for the press and proofreading.

Sincerely yours,

DM:MMM

Deane Montgomery

cc: R. Oppenheimer ✓

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY cc: Prof. Montgomery

PRINCETON, NEW JERSEY

OFFICE OF THE DIRECTOR

30 March 1957

Dear Dr. Kakutani:

From Deane Montgomery I have learned of your great interest in studying the unpublished papers of von Neumann. We would be most grateful to you if you would examine them also from the point of view of giving us your advice on whether some of them should be published, and what editing or alteration they would need. We would like you to come here whenever it is convenient for you, and will be glad to pay you for the expenses that you incur in such trips.

Very sincerely,

Robert Oppenheimer

Dr. Shizuo Kakutani
Department of Mathematics
Yale University
New Haven, Connecticut

March 29, 1957

Dr. Robert Oppenheimer
Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

Dear Robert:

This letter will confirm the oral discussions which I had with you and Mrs. Gormam during the course of my recent visit to Princeton, as follows:

1. The arrangements outlined below are designed to apply to both the published and unpublished papers of my late husband, Dr. John Von Neumann.

2. Julian Bigelow and Deane Montgomery, and perhaps some other people whose names you and I may subsequently agree to add, will assist with completing the listing of the published and/or unpublished papers.

3. Mrs. Gorman will act as custodian of such papers as are at the Institute. You have generously agreed to permit the papers to remain in their present location at the Institute at least for the next several months.

4. Any scientific person within the Institute may see these papers, may if necessary remove them briefly from the office where they are presently located, but may not keep any papers away from such office overnight.

5. The papers at the Institute under Mrs. Gorman's custodianship may be made available (for study or reference work to be done at the Institute) to such persons outside the Institute as may have a legitimate academic interest therein, including in particular former co-workers of Dr. Von Neumann. In most cases, Mrs. Gorman will know the persons falling into this category. Should there be any request from some person who is not known either to her or to the people with whom she may discuss the matter in the Mathematics Department at the Institute, she will clear the request to see the papers with you in your capacity as Director of the Institute.

6. Some of the published and/or unpublished papers are still in Washington, and if feasible will be sent to the Institute in the near future to be added to the papers that are already there. Once these papers are so added, the procedures outlined above shall apply.

7. With respect to any proposals or suggestions having to do with either republication of previously published papers, or publication for the first time of papers not heretofore published, all such matters should be referred to my attorney, Mr. Marx Leva, 1701 K Street, N. W., Washington, D. C., since the estate of Dr. Von Neumann is being administered in Washington.

* * * * *

In addition to the arrangements set out above with respect to the published and/or unpublished papers, it is my hope, in which Marina joins, that the various technical books which belonged to Dr. Von Neumann can be presented to the Institute. Before exploring the ways and means by which this objective may be accomplished, I thought that I should acquaint you with our intentions in this regard, to make sure that such a presentation, assuming it can be worked out, is acceptable from your standpoint.

Sincerely,

Klara D. Von Neumann
Administratrix, Estate of
Dr. John Von Neumann

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
PRINCETON, NEW JERSEY

SCHOOL OF MATHEMATICS

March 13, 1957

Dear Robert,

Yesterday Klara said she thought Bigelow should be added to the committee on publication and asked my opinion. I was rather cool to the idea, thinking in part that it might interfere with his graduate work and also that he might be slow, This hurt her feelings quite a lot; so I backed down a good deal and said I didn't care at all what was done.

Since her feelings were

[illegible]

to mention this awkwardness of mine to you and to explain how that I really don't care at all how the [illegible], It is a minor matter — to me at least, — but for her it is clearly different, and she is in quite an emotional state anyway, Your decision will be fine with me.

Dave.

P.S. I hope to see her around noon and will try to put her at ease.

26 February 1957

Dear Mrs. von Neumann:

Professor Montgomery has told us of your plan to be in Princeton for a few days some ten days from now. This note is just to let you know Dr. Oppenheimer's schedule. He will be in California until Monday, March 11th, and will then be in Princeton until the 5th of April.

Sincerely yours,

(Mrs. Wilder Hobson)
Secretary to the Director

Mrs. John von Neumann
Hotel Woodner
3636 Sixteenth Avenue, NW
Washington, D. C.

18 February 1957

Dear Marina:

There may be one set of questions that I should talk over briefly with Klari, if and when she comes back to Princeton. This has to do with the posthumous publication of some of your father's work in progress at the time of his death; and with the possible republication of selected earlier work. There are people here at the Institute who could, by putting their heads together, make a good judgment of what this would mean for the scientific communities, but I believe that before we even think about it we should see what Klari's desires are. May I leave it to you, if she does come here and is well enough, to tell her about this problem?

Very sincerely,

Robert Oppenheimer

Mrs. Robert Whitman
2 Dickinson Street
Princeton, New Jersey

15 February 1957

Memorandum to Professors Gödel, Montgomery, Pais; Dr. Goldstine:

Perhaps this is a good time to start thinking about two questions:

1. Are there works of von Neumann which should be considered for posthumous publication? I hear from Bailey, for instance, that there is half a book on the brain as computer.

2. Should we consider the republication either of selected or collected works?

I would be very grateful for your counsel, and before long will perhaps suggest that we meet to talk about these questions.

Robert Oppenheimer

Bigelow added.

These pages were never evaluated because D. Montgomery said he did not know enough German. It was with other manuscripts in C.8.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

School of Mathematics, Fine Hall

Princeton, New Jersey

Sept. 25, 1937

My dear Mr. Halperin,

Contrarily to what I have asserted before, one can even prove

$$x = \prod_{u \in \mathcal{L}} (x + u)$$

as a general identity in x, where a,b are given, $a \leq b$, and $\mathcal{L}$ is the set consisting of $u = a$ and of all complements u of a in b.

Proof: Put

$$x = x_1 + x_2,$$

$$x_1 \leqq b, \quad bx_2 = 0.$$

Put

$$x_1 = x_{11} + x_{12},$$

$$x_{11} \leq a, \quad ax_{12} = 0.$$

Now $x_{12} \leq x_1 \leqq b$, $ax_{12} = 0$ secures the existence of a complement v of a in b with

$$x_{12} \leqq v.$$

We have $av = 0$, $(a + v)\, x_2 = bx_2 = 0$, so $(a, v, x_2) \perp$. Now

$$(x + a)(x + v) =$$

$$= (x_{11} + x_{12} + x_2 + a)(x_{11} + x_{12} + x_2 + v)$$

$$= (a + x_{12} + x_2)(x_{11} + v + x_2)$$

$$= [\text{as } x_{11} + x_2 \leqq a + x_2] = [\text{as } x_{12} \leqq v]$$

$$= x_{11} + x_2 + x_{12} + (a + x_2)v$$

$$= [\text{as } (a, v, x_2)\perp]$$

$$= x_{11} + x_2 + x_{12} = x.$$

So $\quad x = (x + a)(x + v).$ Now

$$x \leq \prod_{u \in \mathcal{L}} (x + u) \leq (x + a)(x + v) = x,$$

hence $\quad x = \prod_{u \in \mathcal{L}} (x + u).$

With the best regards

Yours

(signed)
John von Neumann

Comment on Continuous Geometry Notes of J. v. Neumann

On September 13, 1937 I spoke with J. v. Neumann at Princeton and pointed out that his Theorem 13.1 of Part II of his Notes could be strengthened and the proof greatly simplified as follows.

Theorem: If L has a homogeneous basis $a_1, \ldots, a_n$ of order $n \geqslant 2$ and y, z satisfy

$$y + \gamma_{ij} = z + \gamma_{ij}$$

for all γ_{ij} in L_{12}, L_{2m} for some fixed $m = 1, 3, \ldots, n$, then

$$y = z.$$

Proof. 1) $y + x \geqslant \gamma_{12}$ for some γ_{12} in L_{12} implies $y + x = z + x$. To see this, we have first

$$y + x = y + x + \gamma_{12} = z + x + \gamma_{12} \geqslant z + x.$$

Now write $(a_1 + a_2)(z + x) = a_2(z + x) + (z + x)'$ where $(z + x)'a_2 = 0$. Then $(z + x)' \varepsilon L_{12}$ since:

(1) $a_2 (z + x)' = 0.$

(2) $a_2 + (z + x)' = a_2 + (a_1 + a_2)(z + x) = (a_1 + a_2)(z + x + a_2)$

$$= (a_1 + a_2)(y + x + a_2) \geqslant (a_1 + a_2)(\gamma_{12} + a_2)$$

$$= a_1 + a_2.$$

This means $z + x \geqslant$ some $X_{12} \varepsilon L_{12}$; hence by the first two lines of this proof, $z + x \geqslant y + x$; and finally $y + x = z + x$.

2) Choose $[(y + z) - y]$ to be an inverse of y in $(y + z)$ and to be $\leq z$. Let $(y + z)'$ be a complement of $y + z$. It follows that $y + [(y + z) - y] + (y + z)' = 1$. Hence $z + [(y + z) - y] + (y + z)' = 1$ by 1) above.

Then $z + (y + z)' = 1$ and

$$(y + z)\,[z + (y + z)'] = y + z\ ,$$

$$z = y + z\ ,$$

$$y \leq z\ ;$$

Similarly, $z \leq y$ and so $y = z$ as required.

Later that day (Sept. 13, 1937) I found a note to me from J. v. N. (copy attached) and on Sept. 25, 1937, J. v. N. wrote me a letter (copy attached) relating to this theorem.

I. Halperin

Princeton, Sept. 13, 1937,--My dear Mr. Halperin, I have observed, that your proof can be contracted somewhat, and the hypotheses weakened considerably, as follows:

Best greetings from Your John von Neumann.

<u>Theorem</u>: Assume $a \leqq b$. Let x, y be such, that

(1) $$x + u = y + u \quad \begin{cases} \text{for every complement } u \text{ of } a \text{ in } b \\ \text{for } u = a \end{cases}$$

Then

(2) $$x = y.$$

<u>Proof</u>: Let z be a complement of $x + y$. Then $x + z + a = (x + a) + z = $ [by (1)] $= (y + a) + z = y + z + a$, so $x + z + a \geqq x, y, z,$ and hence $\geqq x + y + z = 1$. So

(3) $$x + z + a = 1$$

Now $b(x + z) \leqq b$ and $a + b(x + z) = $ [as $a \leqq b$] $= b(x + z + a) = $ [by (3)] $=$ $b.1 = b$. Hence by C.G.I., p. 7 (Theorem 1.4, Corollary 2, applied to $L(0,b)$ instead of L) a complement u of a in b with $b(x + z) \geqq u$ exists. So $x + z \geqq b(x + z) \geqq u$. Therefore $x + z = (x + z) + u =$ $(x + u) + z = $ [by (1)] $= (y + u) + z \geqq y$, and consequently $x + z = (x + z) + y = x + y + z = 1$. So

(4) $$x + z = 1.$$

Now $x + y = (x + y).1 = $ [by (4)] $= (x + y)(x + z) = $ [as $x \leqq x + y$] $=$ $x + (x + y)\, z = x$, and so

(5) $$x \geqq y.$$

Interchange $x, y,$ then (5) becomes

(6) $$x \leqq y.$$

(5), (6) give together

(7) $$x = y,$$

completing the proof.

Minor Corrections to be made.

BIBLIOGRAPHY OF JOHN VON NEUMANN

Books

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, J. Springer (1932); New York, Dover Publications (1943); Presses Universitaires de France (1947); Madrid, Instituto de Mathematicas "Jorge Juan" (1949); trans. from German by Robert T. Beyer, Princeton Univ. Press (1955).

With O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press (1944, 1947, 1953). 625 pp. German trans. by Docquier (in press).

Functional Operators. Vol. I: Measures and Integrals (Ann. Math. Studies, No. 21, 261 pp.); Vol. II: The Geometry of Orthogonal Spaces (Ann. Math. Studies, No. 22, 107 pp.). Princeton Univ. Press (1950).

The Computer and the Brain (Silliman Lectures). Yale Univ. Press (1958). 82 pp.

Articles†

1922

1. With M. Fekete. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. Jahresb., 31:125-138. [Vol. I, No. 2.]

1923

2. Zur Einführung der transfiniten Zahlen. Acta Szeged, 1:199-208. [Vol. I, No. 3.]

1925

3. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. J.f. Math., 154:219-240. [Vol. I, No. 4.]
4. Egyenletesen sürü számsprozatok. Math. Phys. Lapok, 32:32-40. [Vol. I, No. 5.]

1926

5. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. Acta Szeged, 2:193-227. [Vol. I, No. 6.]

1927

6. With D. Hilbert and L. Nordheim. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Math. Ann., 98:1-30. [Vol. I, No. 7.]
7. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Sitzungsber, d. Preuss. Akad., pp. 76-90. [Vol. I, No. 8.]

8. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Gött. Nach., pp. 1-57. [Vol. I, No. 9.]
9. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nach. pp. 245-272. [Vol. I, No. 10.]
10. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. Gött. Nach., pp. 273-291. [Vol. I, No. 11.]
11. Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zschr., 26;1-46. [Vol. I, No. 12.]

1928

12. Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen. Fund. Math., 11:230-238. [Vol. I, No. 13.]
13. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann., 99:134-141. [Vol. I, No. 14.]
14. Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann., 99:373-391. [Vol. I, No. 15.]
15. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann., 100:295-320. [Vol. VI, No. 1.]*
16. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zschr., 27:669-752. [Vol. I, No. 16.]
17. With E. Wigner. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, I. Zschr. f. Phys., 47:203-220. [Vol. I, No. 18.]
18. Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons. Zschr. f. Phys., 48:868-881. [Vol. I, No. 17.]
19. With E. Wigner. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, II. Zschr. f. Phys., 49:73-94. [Vol. I, No. 19.]
20. With E. Wigner. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, III. Zschr. f. Phys., 51:844-858. [Vol. I, No. 20.]

1929

21. Über eine Widerspruchfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre. J. f. Math., 160:227-241. [Vol. I, No. 21.]
22. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Zschr., 30:3-42. [Vol. I, No. 22.]
23. With E. Wigner. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Phys. Zschr., 30:465-467. [Vol. I, No. 23.]
24. With E. Wigner. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. Phys. Zschr., 30:467-470. [Vol. I, No. 24.]
25. Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik. Zschr. f. Phys., 57:30-70. [Vol. I, No. 25.]

26. Zur allgemeinen Theorie des Masses. Fund. Math., 13:73-116. [Vol. I, No. 26.]
27. Zusatz zur Arbeit "Zur allgemeinen . . . ." Fund. Math., 13:333. [Vol. I, No. 27.]
28. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann., 102:49-131. [Vol. II, No. 1.]
29. Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann., 102:370-427. [Vol. II, No. 2.]
30. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. J. f. Math., 161:208-236. [Vol. II, No. 3.]

1930

31. Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung. Hamb. Abh., 8:28-31. [Vol. II, No. 4.]

1931

32. Über Funktionen von Funktionaloperatoren. Ann. Math., 32:191-226. [Vol. II, No. 5.]
33. Algebraische Repräsentanten der Funktionen "bis auf eine Menge vom Maasse Null." J. f. Math., 165:109-115. [Vol. II, No. 6.]
34. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Ann., 104:570-578. [Vol. II, No. 7.]
35. Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leśniewski über meine Arbeit "Zur Hilbertschen Beweistheorie." Fund. Math., 17:331-334. [Vol. II, No. 8.]
36. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. Report to the Congress, Königsberg, Sept. 1931. Erkenntniss, 2:116-121. [Vol. II, No. 9.]

1932

37. Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen. Math. Zschr., 30:1-2. [Vol. II, No. 10.]
38. Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. Math., 33:294-310. [Vol. II, No. 11.]
39. Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis. N.A.S. Proc., 18:70-82. [Vol. II, No. 12.]
40. Physical Applications of the Quasi-ergodic Hypothesis. N.A.S. Proc., 18:263-266. [Vol. II, No. 13.]
41. With B.O. Koopman. Dynamical Systems of Continuous Spectra. N.A.S. Proc., 18:255-263. [Vol. II, No. 14.]
42. Über einen Satz von Herrn M.H. Stone. Ann. Math., 33:567-573. [Vol. II, No. 15.]
43. Einige Sätze über messbare Abbildungen. Ann. Math., 33:574-586. [Vol. II, No. 16.]

44. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Ann. Math., 33:587-642. [Vol. II, No. 17.]
45. Zusätze zur Arbeit "Zur Operatorenmethode . . . ." Ann. Math., 33:789-791. See also No. 44. [Vol. II, No. 18.]

1933

46. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. Math., 34:170-190. [Vol. II, No. 19.]
47. A koordináta-mérés pontosságának határai az elektron Dirac-féle elméletében (Über die Grenzen der Koordinatenmessungs-Genauigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons). Mat. és Természettud . . . Értesitó, 50:366-385. [Vol. II, No. 20.]

1934

48. With P. Jordan and E. Wigner. On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism. Ann. Math., 35:29-64. [Vol. II, No. 21.]
49. Zum Haarschen Maass in topologischen Gruppen. Compos. Math., 1:106-114. [Vol. II, No. 22.]
50. Almost Periodic Functions in a Group. I. A.M.S. Trans., 36:445-492. [Vol. II, No. 23.]
51. With A.H. Taub and O. Veblen. The Dirac Equation in Projective Relativity. N.A.S. Proc., 20:383-388. [Vol. II, No. 24.]

1935

52. On Complete Topological Spaces. A.M.S. Trans., 37:1-20. [Vol. II, No. 25.]
53. With S. Bochner. Almost Periodic Functions in Groups. II. A.M.S. Trans., 37:21-50. [Vol. II, No. 26.]
54. With S. Bochner. On Compact Solutions of Operational-Differential Equations. I. Ann. Math., 36:255-291. [Vol. IV, No. 1.]
55. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators. Actualitiés Scient. et Ind. Series, No. 229. Exposés Math., publiés à la mémorie de J. Herbrand, No. 13. Paris. 20 pp. [Vol. IV, No. 2.]
56. On Normal Operators. N.A.S. Proc., 21:366-369. [Vol. IV, No. 3.]
57. With P. Jordan. On Inner Products in Linear, Metric Spaces. Ann. Math., 36:719-723. [Vol. IV, No. 4.]
58. With M. H. Stone. The Determination of Representative Elements in the Residual Classes of a Boolean Algebra. Fund. Math., 25:353-378. [Vol. IV, No. 5.]

1936

59. On a Certain Topology for Rings of Operators. Ann. Math., 37:111-115. [Vol. III, No. 1.]
60. With F. J. Murray. On Rings of Operators. Ann. Math., 37:116-229. [Vol. III, No. 2.]
61. On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism (Part I). Mat. Sbornik, 1:415-484. [Vol. III, No. 9.]
62. The Uniqueness of Haar's Measure. Mat. Sbornik, 1:721-734. [Vol. IV, No. 6.]
63. With G. Birkhoff. The Logic of Quantum Mechanics. Ann. Math., 37: 823-843. [Vol. IV, No. 7.]
64. Continuous Geometry. N.A.S. Proc., 22:92-100. [Vol. IV, No. 8.]
65. Examples of Continuous Geometries. N.A.S. Proc., 22:101-108. [Vol. IV, No. 9.]
66. On Regular Rings. N.A.S. Proc., 22:707-713. [Vol. IV, No. 10.]

1937

67. With K. Kuratowski. On Some Analytic Sets Defined by Transfinite Induction. Ann. Math., 38:521-525. [Vol. IV, No. 19.]
68. With F. J. Murray. On Rings of Operators, II. A.M.S. Trans., 41:208-248. [Vol. III, No. 3.]
69. Some Matrix-Inequalities and Metrization of Matrix-Space. Tomck. Univ. Rev., 1:286-300. [Vol. IV, No. 20.]
70. Algebraic Theory of Continuous Geometries. N.A.S. Proc., 23:16-22. [Vol. IV, No. 11.]
71. Continuous Rings and Their Arithmetics. N.A.S. Proc., 23:341-349. [Vol. IV, No. 12.]
72. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Erg. eines Math. Coll., Vienna, ed. by K. Menger, 8:73-83. **

1938

73. On Infinite Direct Products. Compos. Math., 6:1-77. [Vol. III, No. 6.]

1940

74. With I. Halperin. On the Transitivity of Perspective Mappings. Ann. Math., 41:87-93. [Vol. IV, No. 13.]
75. On Rings of Operators, III. Ann. Math., 41:94-161. [Vol. III, No. 4.]
76. With E. Wigner. Minimally Almost Periodic Groups. Ann. Math., 41: 746-750. [Vol. IV, No. 21.]
77. With R. H. Kent. The Estimation of the Probable Error from Successive Differences. Ballistic Research Laboratory Report No. 175, Feb. 14. 19 pp. **

1941

78. With R. H. Kent, H. R. Bellinson and B. I. Hart. The Mean Square Successive Difference. Ann. Math. Stat., 12:153-162. [Vol. IV, No. 33.]
79. With I. J. Schoenberg. Fourier Integrals and Metric Geometry. A. M. S. Trans., 50:226-251. [Vol. IV, No. 22.]
80. Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance. Ann. Math. Stat., 12:367-395. [Vol. IV, No. 34.]
81. Shock Waves Started by an Infinitesimally Short Detonation of Given (Positive and Finite) Energy. National Defense Research Council, Div. 8, June 30. AM-9. **
82. Optimum Aiming at an Imperfectly Located Target. Appendix to: Optimum Spacing of Bombs of Shots in the Presence of Systematic Errors, by L. S. Dederick and R. H. Kent. Ballistic Research Laboratory Report 241, July 3. 26 pp. [Vol. IV, No. 37.]

1942

83. A Further Remark Concerning the Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance. Ann. Math. Stat., 13:86-88. [Vol. IV, No. 35.]
84. With P. R. Halmos. Operator Methods in Classical Mechanics, II. Ann. Math., 43:332-350. [Vol. IV, No. 23.]
85. With S. Chandrasekhar. The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars, I. Astrophys. J., 95:489-531. [Vol. VI, No. 12.]
86. Note to: Tabulation of the Probabilities for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance, by B. I. Hart. Ann. Math. Stat., 13:207-214. [Vol. IV, No. 36.]
87. Approximative Properties of Matrices of High Finite Order. Portugaliae Math., 3:1-62. [Vol. IV, No. 24.]
88. Theory of Detonation Waves. A progress report to April 1, 1942. PB 31090, May 4. 34 pp. [Vol. VI, No. 20.]

1943

89. With F. J. Murray. On Rings of Operators, IV. Ann. Math., 44:716-808. [Vol. III, No. 5.]
90. With S. Chandrasekhar. The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars. II. The Speed of Fluctuations; Dynamical Friction; Spatial Correlations. Astrophys. J., 97:1-27. [Vol. VI, No. 13.]
91. On Some Algebraical Properties of Operator Rings. Ann. Math., 44:709-715. [Vol. III, No. 8.]
92. With R. J. Seeger. On Oblique Reflection and Collision of Shock Waves. PB 31918, September 20. 3 pp. **

93. Theory of Shock Waves. Progress report to Aug. 31, 1942. PB 32719, January 29. 37 pp. [Vol. VI, No. 19.]
94. Oblique Reflection of Shocks. PB 37079, October 12. 75 pp. [Vol. VI, No. 22.]

1944

95. Proposal and Analysis of a Numerical Method for the Treatment of Hydrodynamical Shock Problems. OSRD-3617, March 20. 31 pp. [Vol. VI, No. 25.]
96. Introductory Remarks (Sec. I), Theory of the Spinning Detonation (Sec. XII), Theory of the Intermediate Product (Sec. XIII). In: Report of Informal Technical Conference on the Mechanism of Detonation. AM-570, April 10. 19 pp. **
97. Rieman Method; Shock Waves and Discontinuities (one-dimensional), Two-Dimensional Hydrodynamics. Lectures in: Shock Hydrodynamics and Blast Waves, by H. A. Bethe, K. Fuchs, J. von Neumann, R. Peierls and W. G. Penney. Notes by J. O. Hirschfelder. AECD-2860, October 28. 106 pp. **

1945

98. A Model of General Economic Equilibrium. Rev. Econ. Studies, 13:1-9. [Vol. VI, No. 3.]
99. Refraction, Intersection and Reflection of Shock Waves. In: Conference on Supersonic Flow and Shock Waves, pp. 4-12. AM-1663, July 16. [Vol. VI, No. 23.]
100. With A. H. Taub. Flying Wind Tunnel Experiments. PB 33263, November 5. 16 pp. **

1946

101. With V. Bargmann and D. Montgomery. Solution of Linear Systems of High Order. Report prepared for Navy BuOrd under Contract Nord-9596. 85 pp. [Vol. V, No. 13.]
102. With A. W. Burks and H. H. Goldstine. Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument. Part I, Vol. I. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. 42 pp. [Vol. V, No. 2.]
103. With R. Schatten. The Cross-Space of Linear Transformations. II. Ann. Math., 47:608-630. [Vol. IV, No. 29.]
104. On the Principles of Large Scale Computing Machines. Unpublished. [Vol. V, No. 1.]

1947

105. The Mathematician. In: The Works of the Mind, ed. by R. B. Heywood (Univ. of Chicago Press), pp. 180-196. [Vol. I, No. 1.]

106. With H. H. Goldstine. Numerical Inverting of Matrices of High Order. A. M. S. Bull., 53:1021-1099. [Vol. V, No. 14.]

107. With H. H. Goldstine. Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument. Part II, Vol. I. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. 69 pp. [Vol. V, No. 3.]

108. With R. D. Richtmyer. Statistical Methods in Neutron Diffusion. LAMS-551, April 9. 22 pp. [Vol. V, No. 21.]

109. The Point Source Solution. Chapt. 2 of Blast Wave. LA-2000, August. pp. 27-57. [Vol. VI, No. 21.]

110.1 With R. D Richtmyer. On the Numerical Solution of Partial Differential Equations of Parabolic Type. LA-657, December 25. 17 pp. [Vol. V, No. 18.]

110. check against master copy

1948

111. With H. H. Goldstine. Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument. Part II, Vol. II. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. 68 pp. [Vol. V, No. 4.]

112. With H. H. Goldstine. Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument. Part II, Vol. III. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. 23 pp. [Vol. V, No. 5.]

113. On the Theory of Stationary Detonation Waves. File No. X122, B. R. L., Aberdeen Proving Ground, Md., September 20. 26 pp.**

114. First Report on the Numerical Calculation of Flow Problems. June 22-July 6. 53 pp. [Vol. V, No. 19.]

115. Second Report on the Numerical Calculation of Flow Problems. July 25-August 22. 72 pp. [Vol. V, No. 20.]

116. With R. Schatten. The Cross-Space of Linear Transformations. III. Ann. Math., 49:557-582. [Vol. IV, No. 30.]

1949

117. On Rings of Operators. Reduction Theory. Ann. Math., 50:401-485. [Vol. III, No. 7.]

118. Recent Theories of Turbulence. (Report made to Office of Naval Research.) Unpublished. [Vol. VI, No. 31.]

1950

119. With R. D. Richtmyer. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. J. Appl. Phys., 21:232-237. [Vol. VI, No. 26.]

120. With G. W. Brown. Solutions of Games by Differential Equations. In: Contributions to the Theory of Games (Ann. Math. Studies No. 24, Princeton Univ. Press), pp. 73-79. [Vol. VI, No. 4.]

121. With N. C. Metropolis and G. Reitwiesner. Statistical Treatment of Values of First 2000 Decimal Digits of e and of Pi Calculated on the ENIAC. Math. Tables and Other Aids to Comp., 4:109-111. [Vol. V, No. 22.]

122. With J. G. Charney and R. Fjørtoft. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. Tellus 2:237-254. [Vol. VI, No. 28.]

123. With I. E. Segal. A Theorem on Unitary Representations of Semisimple Lie Groups. Ann. Math., 52:509-517. [Vol. IV, No. 25.]

1951

124. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. Math. Nach., 4:258-281. [Vol. IV, No. 26.]

125. The Future of High-Speed Computing. Proc., Comp. Sem., Dec. 1949, published and copyrighted by I. B. M. (1951), p. 13. [Vol. V, No. 6.]

126. Discussion on the Existence and Uniqueness or Multiplicity of Solutions of the Aerodynamical Equations. Chapter 10 of Problems of Cosmical Aerodynamics, Proceedings of the Symposium on the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions held at Paris, Aug. 16-19, 1949. Central Air Doc. Office, pp. 75-84. [Vol. VI, No. 24.]

127. With H. H. Goldstine. Numerical Inverting of Matrices of High Order, II. A. M. S. Proc., 2:188-202. [Vol. V, No. 15.]

128. Various Techniques Used in Connection with Random Digits. Chapter 13 of Proceedings of Symposium on "Monte Carlo Method" held June-July 1949 in Los Angeles. Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Series, 12:36-38. [Vol. V, No. 23.]

129. The General and Logical Theory of Automata. In: Cerebral Mechanisms in Behavior--The Hixon Symposium (Sept. 1948, Pasadena), ed. by L. A. Jeffress (New York, Wiley), pp. 1-31. [Vol. V, No. 9.]

1952

130. Discussion Remark Concerning Paper of C. S. Smith, "Grain Shapes and Other Metallurgical Applications of Topology." In: Metal Interfaces, Am. Soc. for Metals, Cleveland, Ohio, pp. 108-110. [Vol. VI, No. 38.]

1953

131. A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem. In: Contributions to the Theory of Games, Vol. II (Ann. Math. Studies, No. 28, Princeton Univ. Press), pp. 5-12. [Vol. VI, No. 5.]

132. With D. B. Gillies and J. P. Mayberry. Two Variants of Poker. In: Contributions to the Theory of Games, Vol. II (Ann. Math. Studies, No. 28, Princeton Univ. Press), pp. 13-50. [Vol. VI, No. 6.]

133. With H. H. Goldstine. A Numerical Study of a Conjecture of Kummer. M. T. A. C. VII, No. 42, pp. 133-134. [Vol. V, No. 24.]

134. Communication on the Borel Notes. Econom., 21:124-125. [Vol. VI, No. 2.]
135. With E. Fermi. Taylor Instability at the Boundary of Two Incompressible Liquids. AECU-2979, Part 2, August 19, pp. 7-13. [Vol. VI, No. 29.]

1954

136. With E. P. Wigner. Significance of Loewner's Theorem in the Quantum Theory of Collisions. Ann. Math., 59:418-433. [Vol. IV, No. 27.]
137. The Role of Mathematics in the Sciences and in Society. Address at 4th Conference of Association of Princeton Graduate Alumni, June 1954, pp. 16-29. [Vol. VI, No. 33.]
138. A Numerical Method to Determine Optimum Strategy. Naval Res. Logistics Quarterly, 1:109-115. [Vol. VI, No. 7.]
139. The NORC and Problems in High Speed Computing. Speech at first public showing of I. B. M. Naval Ordnance Research Calculator, Dec. 2, 1954. [Vol. V, No. 7.]
140. Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 45. Düsseldorf. [Vol. V, No. 8.]
141. Non-Linear Capacitance or Inductance Switching, Amplifying and Memory Devices. Unpublished. (Basic paper for Patent 2, 815, 488, filed April 28, 1954.) [Vol. V, No. 11.]

1955

142. Can We Survive Technology? Fortune, June. [Vol. VI, No. 35.]
143. With A. Devinatz and A. E. Nussbaum. On the Permutability of Self-Adjoint Operators. Ann. Math., 62:199-203. [Vol. IV, No. 28.]
144. With Bryant Tuckerman. Continued Fraction Expansion of $2^{1/3}$. Math. Tables and Other Aids to Computation, IX:23-24. [Vol. V, No. 25.]
145. With H. H. Goldstine. Blast Wave Calculation. Comm. Pure and Applied Math., 8:327-353. [Vol. VI, No. 27.]
146. Method in the Physical Sciences. In: The Unity of Knowledge, ed. by L. Leary (New York, Doubleday), pp. 157-164. [Vol. VI, No. 34.]
147. Defense in Atomic War. (Paper delivered at a symposium in honor of Dr. Robert H. Kent, Dec. 7, 1955.) The Scientific Bases of Weapons, pp. 21-23. [Vol. VI, No. 37.]
148. Impact of Atomic Energy on the Physical and Chemical Sciences. (Speech at M.I.T. Alumni Day Symposium.) Tech. Rev., Nov., pp. 15-17. [Vol. VI, No. 36.]

1956

149. Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components. In: Automata Studies, ed. by C. E. Shannon and J. McCarthy (Princeton Univ. Press), pp. 43-98. [Vol. V, No. 10.]

150. The Impact of Recent Developments in Science on the Economy and on
51 Economics. (Speech at National Planning Assoc., Washington, D.C. Dec. 12, 1955.) Looking Ahead, 4:11. [Vol. VI, No. 11.]

1958

151. Non-Isomorphism of Certain Continuous Rings (with introduction by I.
52 Kaplansky). Ann. Math., 67:485-496. [Vol. IV, No. 14.]

1959

152. With H. H. Goldstine and F. J. Murray. The Jacobi Method for Real
53 Symmetric Matrices. J. Assoc. Computing Machinery, 6:59-96. [Vol. V, No. 16.]

153. With A. Blair, N. Metropolis, A. H. Taub and M. Tsingou. A Study of
15 a Nuermical Solution to a Two-Dimensional Hydrodynamical Problem. M.T.A.C. XIII:145-184. [Vol. V, No. 17.]

---

†With most items listed there is given a volume and a number. These denote the volume and the order number in that volume where the item may be found. Thus, [Vol. I, No. 2] at the end of item 1 implies that item 1 is the second article in Volume I.

*Translated by S. Bargmann. On the Theory of Games of Strategy. In: Contributions to the Theory of Games, Vol. IV (Ann. Math. Studies, No. 40, Princeton Univ. Press 1959), pp. 13-42.

**These items will not be found in the collected works. The Appendix to the bibliography states the nature of the material omitted.

Appendix to Bibliography of John von Neumann

The following paragraphs describe the nature of the articles in the bibliography which are omitted from the collected works. The articles are identified by the number appearing in the bibliography.

72. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

    This paper has been translated and published as item number 98 of the bibliography, which is included in Vol. VI, No. 3.

77. With R. H. Kent. The Estimation of the Probable Error from Successive Differences.

    The results contained in this report are given in item 78, which is included in Vol. IV, No. 33.

81. Shock Waves Started by an Infinitesimally Short Detonation of Given (Positive and Finite) Energy.

    Item 109 of the bibliography, which is in Vol. VI, No. 21, is another, more polished version of this report.

92. With R. J. Seeger. On Oblique Reflection and Collision of Shock Waves.

    The contents of this short memorandum are contained in item 94 of the bibliography. The latter report is in Vol. VI, No. 22.

96. Introductory Remarks (Sec. I), Theory of the Spinning Detonation (Sec. XII), Theory of the Intermediate Product (Sec. XIII). In: Report of Informal Technical Conference on the Mechanism of Detonation.

    The remarks made by von Neumann at the conference summarized in this document are in the main contained in item 88 of the bibliography. The latter report is in Vol. VI, No. 20.

97. Rieman Method; Shock Waves and Discontinuities (one-dimensional); Two Dimensional Hydrodynamics. Lectures in: Shock Hydrodynamics and Blast Waves, by H A. Bethe, K. Fuchs, J. von Neumann, R. Peierls and W. G. Penney. Notes by J. O. Hirschfelder.

    This report contains notes of lectures given by von Neumann at Los Alamos

Scientific Laboratory. The material in these notes is described in a number of treatises and text books.

100. With A. H. Taub. Flying Wind Tunnel Experiments.

This report describes the first steps of an experimental program which was not carried to completion.

113. On the Theory of Stationary Detonation Waves.

Item 88 of the bibliography, which is in Vol. VI, No. 20, contains all the results described in this report and the mathematical derivation of the results.

(For limited distribution)

Addendum to

Bibliography of John von Neumann

1944

i. Surface Water Waves Excited by an Underwater Explosion. (Memorandum to J. R. Oppenheimer, Aug. 28, 1944.) LAMS-128. 5 pp.

ii. Digest of J. von Neumann's Lecture at Meeting on Optimum Heights, on Sept. 22, 1944. (Memorandum to N. F. Ramsey from B. Waldman, Dec. 7, 1944.) LAMD-46. 8 pp. SRD

iii. Remarks on Report of R. R. Halverson, "The Effect of Air Burst on the Blast from Bombs and Small Charges, Part II." (Memorandum to J. R. Oppenheimer, Oct. 23, 1944.) AM-863. 7 pp. C

1946

iv. With M. M. Shapiro. Underwater Explosion of a Nuclear Bomb. LA-545, April 8, 1946. 24 pp. (Also issued as Chapt. 14 in Vol. VII, Pt. III of Los Alamos Tech. Series LA-1022.)

v. Comments Concerning Dr. W. G. Penney's Report, "Depth for Test C." Enclosure Q of Report on Instrumentation Program of Technical Staff, Vol. II. Operation Crossroads. Dec. 1, 1946. XRD-210 (XR-156, v. 2). 345 pp.

1947

vi. With F. Reines. The Mach Effect and the Height of Burst. Chapt. 10 of Blast Wave, Los Alamos Sci. Lab. Tech. Series, Vol. VII, Pt. II, ed. by H. Bethe. Aug. 13, 1947. LA-1021. 318 pp.

1951

vii. By Ralph W. Gerard. Some of the Problems Concerning Digital Notions in the Central Nervous System. In: Cybernetics (New York, Josiah Macy, Jr. Foundation). Remarks by John von Neumann in the discussion, pp. 19-31.

Reviews

viii. Waerden, B. L. van der. Moderne Algebra. (Berlin, J. Springer, 1930-31.) Acta Szeged, 5:259-260 (1932).

ix. Wiener, N. Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine. (New York, Wiley, 1948.) Phys. Today 2:33-34 (1949).